

Trayectorias de Aprendizaje en Educación Matemática

Texto extraído y traducido al español de:

Learning Trajectories in Mathematics Education
Douglas H. Clements
Julie Sarama
Graduate School of Education
University of Buffalo, State University of New York
Mathematical thinking and learning, 6(2), 81 - 89, 2004

La visión de los últimos planes de estudio de matemáticas basados en investigación revela varias características comunes. Estos incluyen los siguientes: la creación y el mantenimiento de vínculos entre la investigación y el desarrollo del currículo como procesos integrados e interactivos; utilizar una amplia gama de metodologías científicas; mantener lazos estrechos entre las tareas y el pensamiento matemático de los niños; y el uso de alguna versión de "trayectorias de aprendizaje" (Clements, 2002).

Como ejemplo, un equipo de educación matemática podría comenzar a diseñar planes de estudio basado en un experimento de pensamiento anticipatorio. Ellos formulan una trayectoria de aprendizaje hipotética que involucra conjeturas acerca tanto una posible ruta de aprendizaje que propone conceptos matemáticos importantes y utilice un medio específico para apoyar y organizar el aprendizaje a lo largo de esta ruta. La trayectoria se concibe a través de un experimento mental en el que se utiliza como un heurístico el desarrollo histórico de las matemáticas. Más recientemente, también se han considerado las estrategias de solución informal de los niños. El diseño original es un conjunto de tareas instruccionales con pautas que recomienda un orden para las tareas y los tipos de pensamiento y aprendizaje en el que los estudiantes pueden involucrarse a medida que participan en las tareas de instrucción.

Frecuentemente, este diseño original no se elabora en detalle porque las tareas se revisan exhaustivamente durante pruebas en aula. Es decir, las tareas que se utilizan actualmente en el salón de clases se determinan sobre los resultados del trabajo día a día, considerando lo aprendido respecto a lo que se sabía previamente antes de realizar la tarea. En esta segunda fase del experimento educativo, este diseño preliminar se refina a través de una serie de procesos cíclicos que involucra intensas deliberaciones sobre las tareas de instrucción, el papel del profesor, y la cultura (en el sentido más amplio) del aula (Gravemeijer, 1999). En la tercera fase, el "mejor de los casos" se construye una secuencia de enseñanza. El objetivo es desarrollar y describir una reseña más general de las trayectorias de aprendizaje hipotéticas que surgen en aulas específicas basada en la secuencia de instrucción y justificada con las dos deliberaciones teóricas y los datos empíricos (Gravemeijer, 1994a, 1994b, 1999). El concepto general es que la información teórica generada en la práctica de la enseñanza particular proporcionará un marco conceptual que los profesores pueden utilizar para construir trayectorias de aprendizaje hipotéticas que se ajusten a sus propios contextos de aula.

Las trayectorias de aprendizaje pueden tener un significado más allá del desarrollo curricular. Hay pruebas de que los mejores maestros utilizan estructuras conceptuales muy parecidas. Por ejemplo, en un estudio de un plan de estudios

basado en la reforma, los pocos maestros tenían mérito, en los debates profundos no se veían moverse a través de un plan de estudios, sino que ayudaban a los estudiantes a moverse a través de una progresión o gama de métodos de solución (Fuson, Carroll, y Drucek, 2000); es decir, usar y modificar simultáneamente un tipo de trayectoria de aprendizaje hipotética.

Construcción de una trayectoria de aprendizaje

En su trabajo seminal, Simon (1995) afirmó que una "trayectoria de aprendizaje hipotética" incluye "el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje y el pensamiento y aprendizaje en el que los estudiantes pueden participar". El nombre de "trayectoria de aprendizaje hipotética" refleja sus raíces en una perspectiva constructivista particular. Es decir, aunque el nombre enfatiza el aprendizaje sobre la enseñanza, la descripción de Simon tiene la clara intención de caracterizar un aspecto esencial del pensamiento pedagógico (es decir, determinar el objetivo, crear tareas relacionadas con el pensamiento y el aprendizaje de los niños, etc.). La naturaleza naciente y compleja de las trayectorias de aprendizaje ha dado lugar a una variedad de interpretaciones y aplicaciones. Por ejemplo, en contraste con el enfoque del equipo de enseñanza tradicional y al enfoque de Simon (1995), algunos sólo hacen hincapié en las progresiones de desarrollo de aprendizaje (lo que Simon llama a los procesos de aprendizaje hipotéticos) durante la creación de un plan de estudios en particular o contexto pedagógico. Creemos que, si bien el estudio de cualquiera de las progresiones del desarrollo psicológico o secuencias de instrucción por separado puede ser objetivos y estudios de cada investigación válidos, puede y debe informar a la educación matemática, el poder y la singularidad de los constructos de las trayectorias de aprendizaje se deriva de la interconexión inextricable entre estos dos aspectos. Para nuestros propósitos, entonces, conceptualizamos trayectorias de aprendizaje como descripciones de pensamiento de los niños y el aprendizaje en un dominio matemático específico y relacionado, conjeturando una ruta a través de un conjunto de tareas de instrucción diseñados para generar esos procesos mentales o acciones hipotéticas para trasladar a los niños a través de una progresión del desarrollo de niveles de pensamiento, creado con la intención de apoyar el logro de los objetivos específicos de ese dominio matemático de los niños (cf. Clements, 2002; Gravemeijer, 1999; Simon, 1995). Consideremos el aspecto de la progresión del desarrollo y el aspecto de las tareas de instrucción por separado. En primer lugar (desde nuestra perspectiva), uno especifica modelos que reflejan las progresiones de desarrollo naturales (al menos para un rango de edad determinado de estudiantes en una cultura particular) identificados en modelos de pensamiento fundamentados teórica y empíricamente en el pensamiento, aprendizaje y desarrollo de los niños (Carpenter y Moser, 1984; Griffin & Case, 1997). Es decir, los investigadores construyen un modelo cognitivo de aprendizaje de los estudiantes que es suficientemente explícito que describen los procesos involucrados en la construcción de los objetivos matemáticos a través de varios niveles estructurales cualitativamente distintos de niveles crecientes de sofisticación, complejidad, abstracción, poder, y generalidad. Este aspecto constructivista distingue el enfoque de trayectoria de aprendizaje de los previos modelos de diseño instruccional que, por ejemplo, utilizan técnicas reduccionistas para desglosar una competencia objetivo en

subdestrezas, basado en la perspectiva de un adulto. Esto se ilustra en el currículum de Fuson (1997), que se basa en un modelo de resolución de problemas escritos, que incluye moverse a través problemas escritos de dificultad creciente basado en el modelo. La teoría es que el aprendizaje que es coherente con tales progresiones naturales del desarrollo es más eficaz, eficiente y generadora para el estudiante que el aprendizaje que no sigue estos pasos. Las investigaciones indican que tener el conocimiento de cómo los niños piensan y aprenden es un aspecto que puede afectar sustancialmente el diseño curricular, centrándose en la enseñanza y el aprendizaje (Tamir, 1988; Walker, 1992). Esto conduce nuestra discusión con el segundo aspecto.

El segundo aspecto de las trayectorias de aprendizaje es una secuencia de instrucción. En nuestro trabajo, estos se componen de tareas claves diseñadas para promover el aprendizaje a nivel conceptual en particular o servir de punto de referencia en la progresión del desarrollo. Se utilizan las investigaciones existentes para identificar tareas eficaces para promover el aprendizaje de los estudiantes en cada nivel, estimulando a los niños a construir los conceptos y habilidades que son propios del nivel de éxito. Es decir, hipotetizamos las construcciones mentales específicas (es decir, acciones mentales-sobre-objetos) y los patrones de pensamiento que constituyen el pensamiento de los niños en cada nivel. Diseñamos tareas que incluyen objetos y acciones externas que reflejen la actividad matemática hipotética de los estudiantes lo más cercana posible; por ejemplo, los objetos pueden ser formas o palos y las acciones pueden ser crear, copiar, unir, desanclar, y esconder tanto unidades individuales y unidades compuestas. Las tareas requieren que los niños apliquen, externa y mentalmente, las acciones y los objetos del nivel de pensamiento objetivo (véase Clements y Battista, 2000, para una descripción más detallada y ejemplos de matemáticas objetos / conceptos y acciones matemáticas / procesos que operan en ellos). Estas tareas están, por supuesto, ordenados en una secuencia que corresponde al orden de las progresiones del desarrollo para completar la trayectoria de aprendizaje hipotética. La principal reivindicación teórica es que tales tareas constituirán un programa educativo particularmente eficaz. Sin embargo, no está implícito de que la secuencia de tareas sea la única, o la mejor, ruta para el aprendizaje y la enseñanza, sólo que se hipotetiza que sea una ruta fecunda. Además, los valores y objetivos determinados socialmente son componentes sustantivos de cualquier plan de estudios (Confrey, 1996; Hiebert, 1999; National Research Council, 2002; Tyler, 1949); la investigación no puede ignorar o determinar estos componentes (cf. Lester y Wiliam, 2002).

Por lo tanto, una trayectoria completa de aprendizaje hipotética incluye los tres aspectos: la meta de aprendizaje, progresiones de desarrollo del pensamiento y el aprendizaje, y la secuencia de las tareas de instrucción. Ya se ha descrito el sinergismo entre los dos últimos aspectos. Menos obvio es que su integración puede producir resultados novedosos, incluso dentro de los campos teóricos locales de la psicología y la pedagogía. La promulgación de una trayectoria de aprendizaje completa y efectiva puede alterar progresiones o expectativas previamente establecidas por los estudios psicológicos ya que abre nuevos caminos para el aprendizaje y el desarrollo de pensamiento. Esto, por supuesto, refleja el tradicional, y simplificado, debate entre Vygotsky (1934/1986) y Piaget

y Szeminska (1952) en relación con la prioridad de desarrollo en el aprendizaje. Creemos que la investigación sobre la trayectoria de aprendizaje, junto con otros aspectos de la investigación, apoya la posición de Vygotsky que, al menos en algunos dominios y algunas maneras, el aprendizaje y las tareas docentes pueden cambiar el curso del desarrollo. Tal sanción basada en el fino análisis cognitivo de la progresión del desarrollo y el análisis detallado similar de las tareas de instrucción proporciona una más elaborada base teórica para el currículo y la instrucción que la que se dispone a menudo y pueden también abrir enfoques o avenidas de instrucción no considerados anteriormente. Tenga en cuenta que estos análisis detallados simultáneos distinguen la construcción de una trayectoria de aprendizaje hipotética de otras líneas de investigación, incluso de trabajos estrechamente relacionados como las disertaciones simultáneas de van Hiele (van Hiele, 1959/1985; van Hiele-Geldof, 1984).

La creación y el uso de trayectorias de aprendizaje siempre implica el análisis conceptual: "El proceso real de pensar sigue siendo invisible y también lo son los conceptos que utiliza y la materia prima de la que se compone" (von Glaserfeld, 1995, p 77). Además, un objetivo de investigación global en el campo de las trayectorias de aprendizaje es generar conocimiento sobre el aprendizaje y la enseñanza. Por lo tanto, los procesos científicos (por ejemplo, la documentación de las decisiones, razones y condiciones, mecanismos hipótesis; que predicen eventos, y la comprobación de las predicciones) deben ser cuidadosamente seguidas y registradas. Además, los autores de los modelos de enseñanza y aprendizaje deben considerar una amplia variedad de aspectos individuales, sociales y contextuales (por ejemplo, Bauersfeld, 1980; Cobb, 2001; McClain y Cobb, 2001; Schofield, 1995; Secada, 1992). Es decir, se debe hacer un esfuerzo concertado para ver el plan de estudios, y el proceso de enseñanza y aprendizaje, a través de múltiples lentes conceptuales (Schoenfeld, 2002), que examinen ambos supuestos y datos subyacentes desde muchos puntos de vistas alternos, y a menudo incompatibles, tanto como sea posible (Lester y Wiliam, 2002).

La construcción de las trayectorias de aprendizaje hipotéticos es una herramienta cognitiva basada en el constructivismo. Ha sido adaptado para su uso con una perspectiva social (por ejemplo, Cobb, 2001), reconceptualizando el constructo de la trayectoria de aprendizaje como una "secuencia (o conjunto) de prácticas matemáticas (tomadas-como-se-compartieron) de aula que emergen a través de la interacción (sobre todo a través del discurso en el aula con la participación proactiva del maestro) "(Yackel, comunicación personal 30 de julio 2003). Yackel no utiliza el aprendizaje de trayectorias para describir el aprendizaje de cada estudiante; esta interpretación difiere de la nuestra, que incluye análisis, tanto a nivel de grupo como individuales. Sin embargo, sí revela otra aplicación, y la contribución de este modo único, del constructo hipotético de la trayectoria de aprendizaje.

En esta descripción, hemos tomado la perspectiva del investigador o investigadores/desarrolladores de currículums que a menudo escriben para una audiencia general. Es importante señalar que las trayectorias de aprendizaje pueden y deben ser reconceptualizadas o creadas por pequeños grupos o maestros individuales, de tal manera que pueden basarse en un conocimiento más íntimo de los estudiantes en particular –su conocimiento existente, las preferencias de aprendizaje, y la participación en ciertos tipos de tareas o

contextos (Simon y Tzur). Ciertamente, *a priori* las trayectorias de aprendizaje son siempre hipotéticas, ya que el aprendizaje y la enseñanza efectiva, y el reconocimiento del profesor de éstos, no se conocen completamente de antemano (Simon, 1995). El maestro debe construir nuevos modelos de enseñanza de las matemáticas a los niños a medida que interactúan con ellos alrededor de las tareas de instrucción, y por lo tanto alterar su propio conocimiento de los niños y las futuras estrategias y modos de instrucción. Por lo tanto, la trayectoria de aprendizaje realizada, las prácticas y entendimientos realizadas mientras se comparte, son emergentes.

Referencias

- Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 23–41.
- Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research*, 55, 201–226.
- Carpenter, T. P., & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179–202.
- Clements, D. H. (2002). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 599–630). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (2000). Designing effective software. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 761–776). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). Logo and geometry. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series*, 10. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress* (pp. 455–478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Confrey, J. (1996). The role of new technologies in designing mathematics education. In C. Fisher, D. C. Dwyer, & K. Yocam (Eds.), *Education and technology, reflections on computing in the classroom* (pp. 129–149). San Francisco: Apple Press.
- Fuson, K. C. (1997). Research-based mathematics curricula: New educational goals require programs of four interacting levels of research. *Issues in Education*, 3, 67–79.
- Fuson, K. C., Carroll, W. M., & Drueck, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the Standards-based curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 277–295.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994a). *Developing realistic mathematics instruction*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 443–471.

- Gravemeijer, K. P. E. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1, 155–177.
- Griffin, S., & Case, R. (1997). Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education*, 3, 1–49.
- Hiebert, J. C. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 3–19.
- Lester, F. K., Jr., & William, D. (2002). On the purpose of mathematics education research: Making productive contributions to policy and practice. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 489–506). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- McClain, K., & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 236–266.
- National Research Council. (2002). *Scientific research in education*. In R. J. Shavelson & L. Towne (Eds.). Washington, DC: National Academy Press.
- Pascual-Leone, J. (1976). A view of cognition from a formalist's perspective. In K. F. R. J. A. Meacham (Ed.), *The developing individual in a changing world: Vol. I Historical and cultural issues*. The Hague, The Netherlands: Mouton.
- Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex, England: Psychology Press.
- Piaget, J., & Szeminska, A. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge and Kegan Paul.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (in press). Linking research and software development. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. New York: Information Age Publishing.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–487). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Schofield, J. W. (1995). *Computers and classroom culture*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Secada, W. G. (1992). Race, ethnicity, social class, language, and achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 623–660). New York: Macmillan.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145.
- Tamir, P. (1988). The role of pre-planning curriculum evaluation in science education. *Journal of Curriculum Studies*, 20, 257–262.
- Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago: University of Chicago Press.
- van Hiele, P. M. (1985). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243–252). Brooklyn, NY:

- Brooklyn College, School of Education. (Original work published 1959) (ERIC Document Reproduction Service No. 289 697)
- van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school (M. Verdonck, Trans.). In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (pp. 1–214). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. 289 697).
 - von Glaserfeld, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. London: The Falmer.
 - Vygotsky, L. S. (1984). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press. (Original work published 1934)
 - Walker, D. F. (1992). Methodological issues in curriculum research. In P.W. Jackson (Ed.), Handbook of research on curriculum (pp. 98–118). New York: Macmillan.

Esta es una traducción no oficial de un artículo abierto seleccionado de Taylor & Francis and Routledge que apareció en una publicación de Taylor & Francis. Taylor & Francis y/o el titular de derecho no ha aprobado esta traducción.

This is an unofficial translation of a Taylor & Francis and Routledge Open Select article that appeared in a Taylor & Francis publication. Taylor & Francis and/or the rightsholder has not endorsed this translation.