

Generalizar

Descripción

La generalización consiste en pasar del estudio de una situación concreta (o de un objeto) al estudio de un conjunto de situaciones entre las que está la de partida (o conjunto de objetos entre los que figura el primero), extrayendo una ley válida para cualquier caso a partir de la comprobación de las conjeturas que sugieran las regularidades observadas en las situaciones u objetos analizados. En realidad, supone la aplicación del método científico, puesto que el objetivo es extraer una ley válida para cualquier situación en general a partir de las regularidades obtenidas en algunos ejemplos (experimentación, planteamiento de hipótesis, comprobación y elaboración de una ley general).

Ejemplo

Si se divide una circunferencia en 33 partes iguales y se unen entre sí todas las divisiones, por medio de líneas rectas, ¿cuántas líneas rectas habrá?

Solución

La realización gráfica de este problema es enormemente confusa y pesada, a parte de la complejidad del procedimiento de división en 33 partes iguales (trazado de un diámetro de la circunferencia, división del diámetro en 33 partes aplicando el teorema de Thales, trazado de arcos con radio igual al diámetro, etc.).

Se debe, pues, emplear otro método.

Empecemos por analizar casos más sencillos:

¿Cuántas líneas hay si se divide la circunferencia en dos partes?

¿Y si se divide en 3? ¿Y en 4?

Estudiemos estos casos haciendo los dibujos a mano alzada:

Nº de divisiones	Líneas
2	1
3	3
4	6
5	10

Teniendo en cuenta que cada línea une dos puntos, es como si hubiese el doble de líneas. La línea que une A con B coincide con la que une B con A. Por lo tanto:

Nº de divisiones	Líneas	Equivalen a
------------------	--------	-------------

2	1	2
3	3	6
4	6	12
5	10	20

¿Qué relación hay entre la primera (n° de divisiones) y la tercera columna (líneas que debería haber)?

De cada división sale una línea a cada una de las otras divisiones (no hay un lazo que salga de una división y vuelva a ella). Si hay que relacionar 5 objetos con otros 4, el número de relaciones sería:

$$5 \times 4$$

¡Cuando hay 5 divisiones existen 20 líneas!

Si hay que relacionar 4 objetos con otros 3, el número de relaciones sería:

$$4 \times 3$$

¡Cuando hay 4 divisiones existen 12 líneas!

Pero, en realidad, al hacer 5 divisiones sólo hay 10 líneas, y al hacer 4, sólo 6.

¡Que son las que en realidad hay: la mitad de las que debería haber si se multiplica el número de divisiones por todas las demás!

¿Eso quiere decir que si se divide en 6 partes, habrá 15 líneas?

$$\frac{6 \times 5}{2} = 15$$

¡En efecto!

Por lo tanto, la ley general será:

$$\frac{n \times (n-1)}{2}$$

Y, en el caso de 33 divisiones, el número de líneas que habrá será:

$$\frac{33 \times 32}{2} = 528$$

Observaciones

Para trabajar la estrategia de generalización se debe potenciar el análisis de casos concretos acostumbrando al alumnado a hacerlo de forma sistemática y ordenada. Esto supone la elaboración de tablas para la recogida de los resultados de los casos concretos y sobre las que analizar las posibles regularidades que existan.

Se debe sugerir a los alumnos y alumnas que la búsqueda de regularidades tiene que ver con el cómo pasar del número de objetos de un tipo (divisiones de la circunferencia) al número de objetos correspondiente del otro tipo (número de líneas) y que, ese paso, habrá que buscarlo mediante el empleo de operaciones sencillas (sumas, productos, cocientes, etc.) o combinaciones de ellas.

Es bueno hacerles ver que, en general, no se debe buscar la forma de paso a partir del término anterior ($n - 1$), ya que eso implica el cálculo previo de dicho término precedente. Y si no sabemos cuántas líneas habrá con 33 divisiones, tampoco sabremos cuántas hay al hacer 32.

En este ejemplo concreto, muchos chicos y chicas ven rápidamente que el número de líneas que hay es igual a la suma de las que hay en todos los casos anteriores.

En este problema, además de observar las regularidades numéricas es imprescindible darse cuenta de que una sola línea representa a dos teóricas. Si esta percepción tarda en producirse, el profesor o profesora puede recurrir a una sugerencia del estilo de "saludaos unos a otros", "¿con cuántos apretones de mano os saludáis", etc. Estas sugerencias, por cierto, no serían sino la aplicación de otra estrategia de resolución: la simulación.

Una vez observadas las posibles regularidades, se debe pasar al planteamiento de hipótesis que permitan explicar las regularidades observadas. Estas hipótesis deberán ser comprobadas mediante ejemplos concretos y diferenciados.

Por último, cuando las hipótesis ya han sido comprobadas, hay que pasar a la expresión verbal, escrita y simbólica de la ley general, para la cual, y según el nivel educativo en el que se esté desarrollando el trabajo, habrá que admitir distintos grados de formalización.