CLASE N° 4:

CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES

A.) Recordemos los conjuntos numéricos vistos en clases anteriores:

Conjunto de los números naturales: $\mathbb{N}$ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Conjunto de los números Cardinales: $\mathbb{N}_0$ $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Conjunto de los números Enteros: $\mathbb{Z}$ $= \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

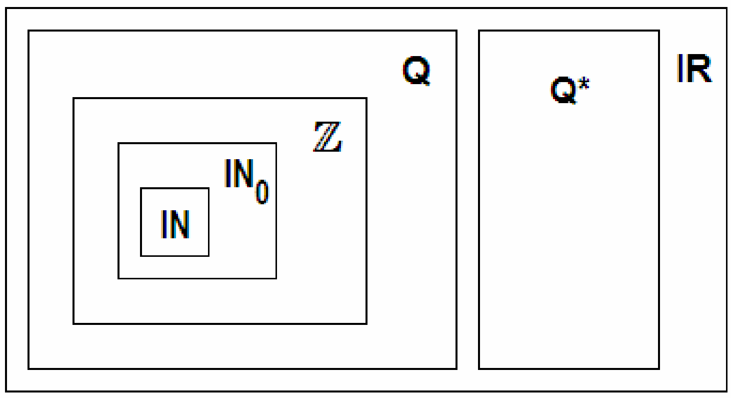
Conjunto de los números Racionales: $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \; / \; a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0 \}$

Conjunto de los números Irracionales: $\mathbb{Q}^* = \{\ldots e, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\}$

Ahora, definimos el **Conjunto de los números REALES:** $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$$

B)Observa el cuadro que relaciona los Conjuntos Numéricos:



¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) VERDADERA(S)?

___1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ____6) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$

___2) $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ ____7) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

___3) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ____8) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

___4) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ____9) $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Q}$

___5) $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}$ ____10) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

NOTA: El **Conjunto de los Números Irracionales $\mathbb{Q}^*$**,
NO tiene elementos comunes con los Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

ACTIVIDAD N° 1: RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS MODELOS DE LA P.S.U.

a) $(-1)^2 + (-2)^2 - 3^2 =$

b) $(-2)^2 - 2^2 + (-2)^3 - 2^4 =$

c) $(\frac{1}{2})^{-1} + 2^{-2} =$

d) $\frac{3^{-1} + 4^{-1}}{5^{-1}} =$

e) $(\frac{1}{2}a^{-2})^{-3} =$

f) $\frac{(-2)^3}{2^4} =$

g) El producto $(0,2)^2 \cdot 10^3$ =

h) El producto 0,25 . 5.000=

ACTIVIDAD N° 2: RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS MODELOS DE LA P.S.U.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{3} =$

b) $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{8} =$

c) $\dfrac{\sqrt{5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6}}{\sqrt[3]{5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6 + 5^6}} =$

d) $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2 =$

e) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{-2} =$

f) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^2 =$

g) $\dfrac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{8}} =$

h) Si $A = 1 + \sqrt{2}$ y $B = 1 - \sqrt{2}$ entonces $(A - B)^2 = ?$

i) Si $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$ entonces ¿cuál(es) de las expresiones siguientes es(son) equivalentes a $\sqrt{60}$?

I) $2.b.c$ II) $\sqrt{a^4.b^2.c^2}$ III) $\sqrt{a^2.b.c}$

j) ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) **RACIONAL(ES)**?

I) $(1 + \sqrt{2})^2$ II) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$ III) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

k) ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) **IRRACIONAL(ES)**?

I) $(2 + \sqrt{2})^2$ II) $\sqrt{9 + 16}$ III) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

l) Si $a = 1 + \sqrt{2}$ y $b = 1 - \sqrt{2}$, ¿cuál(es) de los siguientes n°s es(son) **RACIONAL(ES)**?

I) $a.b$ II) $\dfrac{a}{b}$ III) $a + b$

m) **$A = \sqrt{3 - x}$** , ¿qué valor debe tener x para que **A** sea un **Número Real**?

I) x= 1 II) x= 2 III) x= 5 IV) x=- 4

ACTIVIDAD Nº 3: Ejercicios de racionalización:

a) $\dfrac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{12}{\sqrt[6]{9}}$ c) $\dfrac{14}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ d) $\dfrac{18}{\sqrt{8} - \sqrt{6}}$ e) $\dfrac{20}{2.\sqrt{7} - 3.\sqrt{2}}$

ACTIVIDAD Nº 4: Caso Especial de racionalización:

a) $\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7 + \sqrt{2}}}{\sqrt{7 - \sqrt{2}}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}}$ d) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{8} - \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{2}}}$

REVISE ACTIVIDADES

RESPUESTA ACTIVIDADES

a) Todas son verdaderas.

ACTIVIDAD N° 1: RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS MODELOS DE LA P.S.U.

a) $(-1)^2 + (-2)^2 - 3^2 = 1 + 4 - 9 = -4$

b) $(-2)^2 - 2^2 + (-2)^3 - 2^4 = 4 - 4 + -8 - 16 = -8 - 16 = -24$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2^{-2} = 2^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

d) $\dfrac{3^{-1} + 4^{-1}}{5^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{4+3}{12}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{5}} = \frac{7}{12} x \frac{5}{1} = \frac{35}{12}$

e) $\left(\frac{1}{2}a^{-2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} (a^{-2})^{-3} = 2^3 .a^6 = 8.a^6$

f) $\dfrac{(-2)^3}{2^4} = \dfrac{-8}{16} = \dfrac{-1}{2}$

g) El producto $(0,2)^2 . 10^3 = 0,04 . 10^3 = 4 . 10^{-2} . 10^3 = 4x10^1$

h) El producto $0,25 . 5.000 = 0,25 . 5 . 10^3 = 1,25x10^3$

ACTIVIDAD N° 2: RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS MODELOS DE LA P.S.U.

a) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{3} = 2.\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2.\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{8} = 4.\sqrt{2} + 5.\sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = 7.\sqrt{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5}}{\sqrt[3]{5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5}} = \dfrac{\sqrt{5 \times 5^5}}{\sqrt[3]{5 \times 5^5}} = \dfrac{\sqrt{5^6}}{\sqrt[3]{5^6}} = \dfrac{5^3}{5^2} = 5^1 = \mathbf{5}$

d) $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^2 = (3.\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = (2.\sqrt{2})^2 = 2^2 . (\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = \mathbf{8}$

e) $(\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}})^{-2} = (\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}})^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{2}{1 + 2.\sqrt{2} + 2} = \frac{2}{3 + 2.\sqrt{2}} \times \frac{3 - 2.\sqrt{2}}{3 - 2.\sqrt{2}} = \frac{6 - 4.\sqrt{2}}{9 - 8} = \mathbf{6 - 4.\sqrt{2}}$

f) $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + 2 + 2 = \mathbf{\frac{9}{2}}$

g) $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{8}} = \frac{5.\sqrt{2} - 3.\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}} = \frac{2.\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}} = \mathbf{1}$

h) Si A= $1 + \sqrt{2}$ y B= $1 - \sqrt{2}$ entonces $(A - B)^2 = ?$

$(A - B)^2 = (1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}))^2 = (1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})^2 = (2.\sqrt{2})^2 = 2^2 . (\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = \mathbf{8}$

i) **Si a = $\sqrt{2}$, b= $\sqrt{3}$ y c= $\sqrt{5}$ entonces ¿cuál(es) de las expresiones siguientes es(son) equivalentes a** $\sqrt{60}$?

I) $2.b.c = 2.\sqrt{3}.\sqrt{5} = 2.\sqrt{15} = \sqrt{4 . 15} = \sqrt{60}$

II) $\sqrt{a^4.b^2.c^2} = a^2.b.c = (\sqrt{2})^2.\sqrt{3}.\sqrt{5} = 2.\sqrt{15} = \sqrt{4 . 15} = \sqrt{60}$

III) $\sqrt{a^2.b.c} = \sqrt{(\sqrt{2})^2.\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \sqrt{2.\sqrt{15}} = \sqrt{\sqrt{4 . 15}} = \sqrt[4]{60}$

Respuesta: I y II

j) ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) **RACIONAL(ES)**?

I) $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2.\sqrt{2} + 2 = 3 + 2.\sqrt{2}$ **IRRACIONAL**

II) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = (2.\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$ **RACIONAL**

III) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$ **ENTERO**

Respuesta: Sólo II

k) ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) **IRRACIONAL(ES)**?

I) $(2 + \sqrt{2})^2 = 4 + 4.\sqrt{2} + 2 = 6 + 4.\sqrt{2}$ **IRRACIONAL**

II) $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ **ENTERO**

III) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$ **IRRACIONAL**

Respuesta: I y III

l) Si a= $1 + \sqrt{2}$ y b= $1 - \sqrt{2}$, ¿cuál(es) de los siguientes nºs es(son) RACIONAL(ES)?

I) $a.b = (1 + \sqrt{2}).(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = \mathbf{-1}$ **RACIONAL**

II) $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 + 2.\sqrt{2} + 2}{1 - 2} = \frac{3 + 2.\sqrt{2}}{-1} = \mathbf{-3 - 2.\sqrt{2}}$ **IRRACIONAL**

III) $a + b = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$ **ENTERO**

Respuesta: Sólo I

m) $A = \sqrt{3 - x}$, ¿qué valor debe tener x para que **A** sea un **Número Real**?

I) x= 1 $A = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ **Nº REAL**

II) x= 2 $A = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1$ **Nº REAL**

III) x= 5 $A = \sqrt{3-5} = \sqrt{-2} = i.\sqrt{2}$ **Nº IMAGINARIO**

IV) x=- 4 $A = \sqrt{3-(-4)} = \sqrt{7}$ **Nº REAL**

Respuesta: I, II y IV

<u>**ACTIVIDAD Nº 3**</u>: Ejercicios de racionalización:

a) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2} - 2}{2}$

b) $\frac{12}{\sqrt[6]{9}} = \frac{12}{\sqrt[6]{3^2}} \times \frac{\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{12.\sqrt[6]{81}}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{12.\sqrt[6]{81}}{3} = 4.\sqrt[6]{81}$

c) $\frac{14}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{14}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{14.(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{14.(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = 7.(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

d) $\frac{18}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} = \frac{18}{\sqrt{8}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{8}+\sqrt{6}}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} = \frac{18.(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{8-6} = \frac{18.(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{2} = 2.(\sqrt{8}+\sqrt{6})$

e) $\frac{20}{2.\sqrt{7}-3.\sqrt{2}} = \frac{20}{2.\sqrt{7}-3.\sqrt{2}} \times \frac{2.\sqrt{7}+3.\sqrt{2}}{2.\sqrt{7}+3.\sqrt{2}} = \frac{20.(2.\sqrt{7}+3.\sqrt{2})}{28-18} = \frac{20.(2.\sqrt{7}+3.\sqrt{2})}{10} = 2.(2.\sqrt{7}+3.\sqrt{2})$

<u>**ACTIVIDAD Nº 4**</u>: Caso Especial de racionalización:

a) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{\sqrt{4-3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{7+\sqrt{2}}}{\sqrt{7-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{7+\sqrt{2}}}{\sqrt{7-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{7+\sqrt{2}}}{\sqrt{7+\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{7+\sqrt{2}})^2}{\sqrt{49-2}} = \frac{7+\sqrt{2}}{\sqrt{47}} \times \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{47}} = \frac{7.\sqrt{47}+\sqrt{94}}{47}$

c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}})^2}{\sqrt{5-3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{\sqrt{8}-\sqrt{2}})^2}{\sqrt{8-2}} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2.\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$