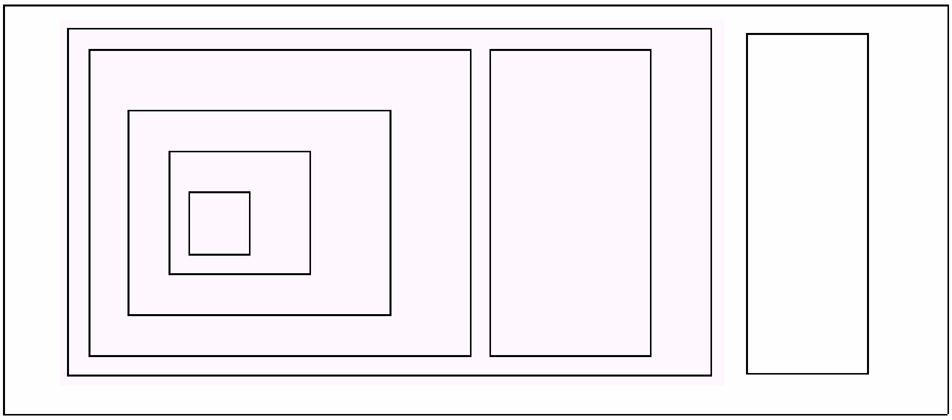
## CLASE N° 6:
## CONJUNTOS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Definimos el **Conjunto de los números COMPLEJOS:** $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ a + b.i \,/\, a, b \in \text{IR} \text{ e } i = \sqrt{-1} \}$$

B.) Completa el cuadro que relaciona los Conjuntos Numéricos:



**C.) ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) VERDADERA(S)?**

___1) $\text{IN} \subset \mathbb{C}$

___2) $\text{IN}_0 \subset \mathbb{C}$

___3) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$

___4) $\mathbf{Q} \subset \mathbb{C}$

____5) $\mathbb{C} = \text{IR} \cup \text{I}$

____6) $\text{IN} \subset \text{IN}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \text{IR} \subset \mathbb{C}$

____7) $\text{I} \subset \mathbb{C}$

____8) $\mathbf{Q}^* \subset \mathbb{C}$

### OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

**Sean $z_1 = 2 + 3.i$ , $z_2 = 5 - 4.i$. Determine las siguientes operaciones con números complejos: (EJEMPLOS):**

a) Adición: $z_1 + z_2 = 2 + 3.i + 5 - 4.i = 7 - i$

b) Sustracción: $z_1 - z_2 = 2 + 3.i - ( 5 - 4.i ) = 2 + 3.i - 5 + 4.i = - 3 + 7.i$

c) Multiplicación: $z_1 \times z_2 = ( 2 + 3.i ) . ( 5 - 4.i ) = 10 - 8.i + 15.i - 12.i^2 = 10 + 7.i - 12.(-1)$

$= 10 + 7.i + 12 = 22 + 7.i$

d) División: $z_1 : z_2 = \frac{2 + 3.i}{5 - 4.i} \times \frac{5 + 4.i}{5 + 4.i} = \frac{10 + 8.i + 15.i + 12.i^2}{25 - 16.i^2} = \frac{10 + 23.i - 12}{25 + 16} = \frac{-2 + 23.i}{41} = \frac{-2}{41} + \frac{23}{41}.i$

**Actividad N° 1**: Sea $z_1 = 2 + 3.i$ , $z_2 = 5 - 8.i$. Determine:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2 =$ c) $z_1 \times z_2 =$ d) $z_1 : z_2 =$

**Actividad N°2**: Sea $z_1 = 1 + 3.i$ , $z_2 = 2 - 5.i$. Determine:

a) $2.z_1 + 3.z_2 =$ b) $3.z_1 - 5.z_2 =$

c) $z_1^2 + z_2^2 =$ d) $z_1^3 =$

**Actividad N°3**: Se define el conjugado de $z = a + b.i$ como $z = a - b.i$.

Si $z_1 = 1 + 2.i$ , $z_2 = 2 - 5.i.$ y $z_3 = 5 + 6.i$ entonces determine el valor de:

a) $z_1 \times z_1 =$ b) $z_2 \times z_2 =$

c) $z_3 \times z_3 =$ d) ¿Qué conclusión se puede obtener de a, b y c ?

**Actividad N°4**: Determine el valor de $z = a + b.i$ determine el valor de a y b en cada ecuación:

a) $2.z - 5 + 7.i = 11 - 9.i$

b) $(1 + 3.i).z + 4.(2 + 3.i) = 9 + 9.i$

c) $(3 - 2.i).(4 - 6.i) - 3.z = (3 - 2.i).(1 - 3.i) - 5.z$

**Actividad N°5**: Se define el MODULO de un número complejo $z = a + b.i$ como

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Determine el módulo de los siguientes números complejos:

a) $z_1 = 3 + 4.i$ ==>

b) $z_2 = 12 - 5.i.$ ==>

c) $z_3 = 8 + 6.i$ ==>

d) $z_4 = 40 - 9.i$ ==>

**Actividad N°6**: Determine el valor pedido:

a) Si $z = a + 10.i$ y $| z | = 26$ ¿cuánto vale a?

b) Si $z = 8 - b.i$ y $| z | = 17$ ¿cuánto vale b?

c) Si $z = 3 - b.i$ y $| z | = 5$ ¿cuánto vale b?

## REVISA ACTIVIDADES

Actividad N° 1:

a) $z_1 + z_2 = 7 - 5.i$ b) $z_1 - z_2 = -3 + 11.i$

c) $z_1 \times z_2 = 34 - i$ d) $z_1 : z_2 = \frac{34 + 31.i}{89}$

Actividad N°2:

a) $2.z_1 + 3.z_2 = 8 - 9.i$ b) $3.z_1 - 5.z_2 = -7 + 34.i$

c) $z_1^2 + z_2^2 = -29 - 14.i$ d) $z_1^3 = -26 - 18.i$

Actividad N°3:

a) $z_1 \times \bar{z}_1 = (1 + 2.i).(1 - 2.i) = 1 - 4.i^2 = 1 + 4 = 5$

b) $z_2 \times \bar{z}_2 = (2 - 5.i).(2 + 5.i) = 4 - 25.i^2 = 4 + 25 = 29$

c) $z_3 \times \bar{z}_3 = (5 + 6.i).(5 - 6.i) = 25 - 36.i^2 = 25 + 36 = 61$

d) ¿Qué conclusión se puede obtener de a, b y c ?

Al multiplicar un número complejo por su conjugado siempre se obtiene un número real no negativo.

Actividad N°4:

a) $2.z - 5 + 7.i = 11 - 9.i \implies 2.z = 16 - 16.i \implies z = 8 - 8.i \implies$ **a= 8** y **b= - 8**

b) $(1 + 3.i).z + 4.(2 + 3.i) = 9 + 9.i \implies (1 + 3.i).z = 9 + 9.i - 8 - 12.i$

$\implies (1 + 3.i).z = 1 - 3.i \implies z = \frac{1 - 3.i}{1 + 3.i} \times \frac{1 - 3.i}{1 - 3.i} = \frac{1 - 6.i + 9.i^2}{1 - 9.i^2} = \frac{1 - 6.i - 9}{1 + 9} = \frac{-8 - 6.i}{10} = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}.i$

$\implies a = \frac{-4}{5}$ y $b = -\frac{3}{5}$

c) $(3 - 2.i).(4 - 6.i) - 3.z = (3 - 2.i).(1 - 3.i) - 5.z \implies 5z - 3z = (3 - 2.i).(1 - 3.i) - (3 - 2.i).(4 - 6.i)$

$\implies 2z = (3 - 2.i).(1 - 3.i - 4 + 6.i) \implies 2z = (3 - 2.i).(-3 + 3.i) \implies 2z = -9 + 9.i + 6.i - 6.i^2$

$\implies 2z = -9 + 9.i + 6.i + 6 \implies 2z = -3 + 15.i \implies z = \frac{-3}{2} + \frac{15}{2}.i \implies a = \frac{-3}{2}$ y $b = \frac{15}{2}$

Actividad N°5:

a) $z_1 = 3 + 4.i \implies |z_1| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

b) $z_2 = 12 - 5.i. \implies |z_2| = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

c) $z_3 = 8 + 6.i \implies |z_3| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

d) $z_4 = 40 - 9.i \implies |z_4| = \sqrt{1600 + 81} = \sqrt{1681} = 41$

c) $z_3 = 8 + 6.i$ ==> $| z_3 | = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

d) $z_4 = 40 - 9.i$ ==> $| z_4 | = \sqrt{1600 + 81} = \sqrt{1681} = 41$

<u>Actividad N°6</u>:

a) Si $z = a + 10.i$ y $| z | = 26$ ¿cuánto vale a?

$| z | = 26 \implies \sqrt{a^2 + 100} = 26 \implies a^2 + 100 = 676 \implies a^2 = 576 \implies a = \pm 24$

b) Si $z = 8 - b.i$ y $| z | = 17$ ¿cuánto vale b?

$| z | = 17 \implies \sqrt{64 + b^2} = 17 \implies 64 + b^2 = 289 \implies b^2 = 225 \implies b = \pm 15$

c) Si $z = 3 - b.i$ y $| z | = 5$ ¿cuánto vale b?

$| z | = 5 \implies \sqrt{9 + b^2} = 5 \implies 9 + b^2 = 25 \implies b^2 = 16 \implies b = \pm 4$