



# Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática Mapa de Progreso de  
Números y Operaciones



Material elaborado por la Unidad de Curriculum, UCE,  
Ministerio de Educación.

Se agradece a los siguientes establecimientos que colaboraron en  
el proceso de recolección de trabajos de alumnos y alumnas:

Alianza Francesa - Vitacura  
Colegio Carlos Oviedo Cavada - Maipú  
Colegio Notre Dame - Providencia  
Colegio San Adrián - Quilicura  
Colegio Saint George - Vitacura  
Colegio Santo Cura de Ars - San Miguel  
Colegio Victor Domingo Silva - La Reina  
Confederación Suiza - Santiago  
Escuela Antártica Chilena - Vitacura  
Escuela Cardenal Raúl Silva Henríquez - Puente Alto  
Escuela Irene Frei de Cid - Santiago  
Escuela República de Ecuador - Viña del Mar  
Escuela San Joaquín - Renca  
Escuela Victoria Prieto - Santiago  
Instituto Nacional - Santiago  
Liceo Christie Mc Auliffe - La Cisterna  
Liceo Darío Salas - Santiago  
Liceo Domingo Espiñeira Riesco - Ancud - Chiloé

## Mapas de Progreso del Aprendizaje

El material que se presenta a continuación, es parte del conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje que describen la secuencia típica en que progresa el aprendizaje, en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de los estudiantes, en los distintos sectores curriculares. Esta descripción está hecha de un modo conciso y de la forma más clara posible para que todos puedan compartir esta visión sobre cómo progresa el aprendizaje a través de los 12 años de escolaridad. **Se busca aclarar a los profesores, a los padres de familia y a los estudiantes, qué significa mejorar en un determinado dominio del aprendizaje.**

Los Mapas complementan las actuales herramientas curriculares (Marco Curricular de OF/CMO y Programas de Estudio) y en ningún caso las sustituyen. Establecen una relación entre currículum y evaluación, orientando lo que es importante evaluar y entregando criterios comunes para observar y describir cualitativamente el aprendizaje logrado. No constituyen un nuevo currículo, ya que no promueven otros aprendizajes; por el contrario, pretenden profundizar la implementación del currículo de la Reforma, promoviendo la observación de las competencias claves que se deben formar.

Los Mapas describen el aprendizaje en 7 niveles, que abarcan desde primero básico a cuarto medio, con la excepción de Inglés, que tiene menos niveles por comenzar su enseñanza en 5° básico.

En estos 7 niveles se describe una secuencia que los estudiantes recorren a diferentes ritmos y, por lo mismo, los niveles no corresponden exactamente a lo que todos logran en un determinado grado escolar. Sin embargo, cada nivel está asociado a una expectativa para dos años de escolaridad. Por ejemplo, el nivel 1 corresponde aproximadamente al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término del 2° Básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° Básico y así sucesivamente. El último nivel (7), describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar es “sobresaliente”, es decir va más allá de la expectativa que se espera para la mayoría que es el nivel 6.

Los Mapas se irán dando a conocer a la comunidad escolar gradualmente. En esta primera etapa se dan a conocer cinco de ellos, que dan cuenta de algunos dominios clave de los sectores de Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia y Ciencias Sociales, Ciencias Naturales e Inglés.

## Matemática

El currículum de Matemática tiene como propósito que los alumnos y alumnas adquieran los conocimientos básicos de la disciplina, a la vez que desarrollen el pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y las habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. La construcción de la Matemática surge de la necesidad de responder y resolver desafíos provenientes de los más variados ámbitos del quehacer humano y de la Matemática misma; su construcción y desarrollo es una creación ligada a la historia y la cultura. Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo de un pensamiento propio y autónomo. El modelamiento matemático de la realidad, mediante el uso apropiado de conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos matemáticos, ayuda al estudiante a comprender situaciones y fenómenos, y le permite formular explicaciones y hacer predicciones de ellos, aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad.

### Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Los aprendizajes de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- **Números y Operaciones**, describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucren distintos tipos de números.
- **Álgebra**, describe cómo los alumnos y alumnas desarrollan, en primer lugar, las abstracciones que prefiguran el álgebra, para luego expresar operaciones y relaciones usando símbolos, así como realizar operaciones mediante el uso del lenguaje algebraico.
- **Geometría**, describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio.
- **Datos y Azar**, describe el crecimiento de la capacidad de recolectar, organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones, y hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

El **Razonamiento Matemático** constituye una dimensión que es abordada transversalmente en estos cuatro Mapas de Progreso.

Los aprendizajes descritos en el Mapa **Números y Operaciones** progresan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

- a. **Comprensión y uso de los números.** Se refiere a la comprensión del significado de los números, la forma de expresarlos y los contextos numéricos a los que pertenecen, así como las aplicaciones y los problemas que los originaron y/o permiten resolver.
- b. **Comprensión y uso de las operaciones.** Se refiere a la comprensión del significado de las operaciones, los contextos numéricos en los que se realizan, las relaciones entre ellas, así como sus propiedades y usos para obtener nueva información a partir de la información dada.
- c. **Razonamiento Matemático.** Involucra habilidades relacionadas con la selección, aplicación y evaluación de estrategias para la resolución de problemas; la argumentación y la comunicación de estrategias y resultados.

## Elementos claves del Mapa de Números y Operaciones

Un supuesto importante que orienta este Mapa se refiere a la íntima relación entre los números, las operaciones que permiten realizar y los problemas que resuelven; y cómo las operaciones generan preguntas y problemas que motivan nuevas definiciones de números y extensiones de los ámbitos numéricos. El progreso del concepto de número está dado, primero, por la extensión de los números naturales en relación con los requerimientos del proceso del conteo; luego, la operación de sustracción muestra la necesidad de los números negativos, motivando la noción de número entero; la división entre números enteros motiva la aparición de los racionales y, la operación extracción de raíz, muestra la necesidad de utilizar nuevos números, dando inicio al estudio de los irracionales y, posteriormente, de los números imaginarios en el caso de las raíces de números negativos.

Las operaciones se consideran en este eje, principalmente, desde el punto de vista de su comprensión, su uso adecuado y cómo a través de ellas los alumnos muestran dominio de los números. Operaciones también incluye la habilidad para estimar y calcular mentalmente.

Finalmente, el Razonamiento Matemático, en este Mapa, se refiere a la resolución de problemas con números y sobre números. La resolución de problemas implica la capacidad de una persona para reunir, organizar, combinar y utilizar en forma apropiada, conocimientos matemáticos que permiten responder a situaciones o problemas parcial o completamente nuevos; o bien, a la capacidad para responder a un problema conocido de una forma nueva, original o parcialmente diferente a las respuestas dadas con anterioridad. En este sentido, resolución de problemas se opone a comportamiento rutinario o repetitivo.

La resolución de problemas también incluye el uso de los números para hacer e investigar conjeturas sobre ellos. Esto involucrará el uso de un rango creciente de estrategias para resolver problemas y argumentaciones crecientemente más abstractas y de naturaleza cada vez más sofisticada.

Esta capacidad requiere el desarrollo de habilidades tales como: la identificación de la incógnita o de las variables cuyos valores permitirían resolver el problema; la búsqueda y construcción de caminos de solución; el análisis de los datos y de las soluciones; la anticipación y estimación de el o los resultados posibles; el análisis de la pertinencia de esos resultados; la sistematización del ensayo y error, así como la aplicación y ajuste de modelos.

En las páginas siguientes se encuentra el Mapa de Progreso de Números y Operaciones. Comienza con una presentación sintética de todos los niveles. Luego se presenta en detalle cada nivel, partiendo por su descripción, algunos ejemplos de desempeño que ilustran cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje, y uno o dos ejemplos de trabajo realizados por alumnos de establecimientos subvencionados, con los comentarios del profesor que justifican por qué juzga que el alumno se encuentra “en” el nivel. En un anexo, se incluye la versión completa de las tareas a partir de las cuales se recolectaron los trabajos de los estudiantes.

## Mapa de Progreso de Números y Operaciones



1 Los enteros motivados por la sustracción, los racionales por los cocientes imposibles entre enteros, los irracionales como consecuencia de la raíz cuadrada y los imaginarios como consecuencia de las raíces de orden par de números negativos.

2 10%, 15%, 20%, 25%, 50%, 75%.

3 Fracciones simples: medios, tercios, cuartos, quintos, octavos, décimos y centésimos.



## Nivel 1

Utiliza los números naturales hasta 1.000 para contar, ordenar, comparar, medir, estimar y calcular cantidades de objetos y magnitudes. Comprende que en estos números, la posición de cada dígito determina su valor. Realiza adiciones y sustracciones comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas. Reconoce que los números naturales se pueden expresar como adiciones o sustracciones de dos números naturales y descomponer en centenas, decenas y unidades. Realiza estimaciones y cálculos mentales de adiciones y sustracciones que requieren de estrategias simples, con números menores que 100. Resuelve problemas rutinarios en contextos familiares, en que los datos están explícitos y cuya estrategia de solución está claramente sugerida en el enunciado. Describe y explica la estrategia utilizada.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Compara números de dos y tres cifras. Por ejemplo: la longitud de ríos chilenos para saber cuál es más largo; el precio de dos o más productos para saber cuál es el más conveniente.
- ⦿ Estima cantidades a partir de un conjunto de objetos. Por ejemplo: cantidad de porotos o piedras en una caja cuando se sabe la cantidad total que ésta es capaz de contener.
- ⦿ Estima el resultado de adiciones y sustracciones a partir del redondeo de los términos involucrados. Por ejemplo: estima el precio total de varios productos, para determinar si el dinero disponible alcanza para la compra.
- ⦿ Calcula mentalmente el resultado de problemas que involucran adición o sustracción de números pequeños. Por ejemplo: calcula mentalmente la cantidad de alumnos en una biblioteca si hay nueve estudiantes y llegan ocho estudiantes más.
- ⦿ Resuelve adiciones y sustracciones, utilizando composición y descomposición aditiva.
- ⦿ Responde preguntas relacionadas con los números y las operaciones. Por ejemplo: responde a la pregunta: ¿Qué sucede cuando cambias la posición de los dígitos en el número 79?

## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

### La tarea

A los alumnos y alumnas se les presentó una situación en la que dos hermanos querían comprar chocolates que costaban 120 pesos cada uno. Se señaló para cuántos chocolates le alcanzaba a Juan y se entregó la cantidad de monedas que tenía Teresa a través de una ilustración. Se les pidió a los estudiantes determinar la cantidad de dinero que tenía cada niño y quién de ellos tenía más dinero para la compra de chocolates.

#### Ejemplo de trabajo en el nivel »

- a. Si Juan tiene dinero para comprar dos chocolates, entonces ¿cuánto dinero tiene Juan? Muestra tu desarrollo.

Realiza la adición necesaria para responder cuánto dinero tiene Juan.

Compone aditivamente para determinar el monto de dinero que tiene Teresa. Compara ambos resultados obtenidos y señala cuál de los dos niños tiene más dinero.

juan tiene para 2 chocolates

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 120 \\ \hline 240 \end{array}$$

el tiene 240 pesos

- b. De los dos hermanos ¿Quién tendría más dinero? Muestra tu desarrollo.

Teresa tiene más dinero tiene  $100 + 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$   
 en total es  $400 + 50 + 5 = 455$  pesos.

Juan tiene 240 pesos Teresa tiene más.

## Nivel 2

Utiliza los números naturales hasta 1.000.000 para contar, ordenar, comparar, medir, estimar y calcular. Comprende que las fracciones simples<sup>4</sup> y los números decimales permiten cuantificar las partes de un objeto, una colección de objetos o una unidad de medida, y realiza comparaciones entre números decimales o entre fracciones. Multiplica y divide (por un solo dígito) con números naturales, comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas. Realiza estimaciones y cálculos mentales de multiplicaciones y divisiones exactas que requieren de estrategias simples. Resuelve problemas rutinarios y/o formula conjeturas en contextos familiares en que los datos no están necesariamente explícitos y requieren reorganizar la información del enunciado. Justifica la estrategia utilizada, explicando su razonamiento o verificando conjeturas a través de ejemplos.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Compara números naturales hasta el millón en contextos de la vida cotidiana. Por ejemplo: el número de personas que asisten a dos eventos masivos diferentes.
- ⦿ Estima el resultado de una multiplicación, a partir del redondeo de los términos involucrados. Por ejemplo: aproxima el resultado del producto de  $13 \cdot 29$ , redondeando los factores a la decena más cercana.
- ⦿ Fracciona en partes iguales objetos o magnitudes representadas gráficamente y escribe la fracción que corresponde a una o más de esas partes.
- ⦿ Compara números decimales con o sin apoyo de la recta numérica. Por ejemplo: compara la estatura de dos estudiantes expresada en metros.
- ⦿ Efectúa cálculos mentales de productos y cuocientes de números por 10, por 100 y por 1.000.
- ⦿ Resuelve problemas que involucran multiplicación, división por un dígito o combinación de estas, realizando la operación adecuada de acuerdo al contexto. Por ejemplo: calcula el dinero reunido en una rifa realizada en un curso de 35 alumnos, si cada alumno vendió 20 números a \$200 cada uno. Otro ejemplo: un padre entrega diariamente \$960 para el pasaje de sus cuatro hijos. ¿Cuánto dinero gasta en pasaje cada niño durante una semana (5 días)?

<sup>4</sup> Fracciones simples: medios, tercios, cuartos, quintos, octavos, décimos y centésimos.



## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

### • La tarea

A los alumnos y alumnas se les presentó un problema con datos explícitos e implícitos en el enunciado. En la situación planteada, los estudiantes debían determinar el número de bolitas que tendrían tres amigos.

Para resolver la primera pregunta, identifica la operación que le permite descubrir datos no explícitos en el problema, traduciendo "7 veces" como una multiplicación por 7. Luego, en la segunda pregunta, elabora una estrategia que involucra separar el problema en partes, que le permite resolverlo paso por paso. Utiliza las operaciones adecuadas y da cuenta que comprende el significado de la división al traducir la "tercera parte" de una cantidad, como una división en tres partes iguales.

### • Ejemplo de trabajo en el nivel »

a. ¿Cuántas bolitas tiene Ernesto?

$$\begin{array}{r} 3 \times \\ 246 \times 7 \\ \hline 1722 \end{array}$$

R: Ernesto tiene 1722 bolitas.

b. Ernesto y Jaime le regalan bolitas a Pedro. Ernesto le regala 10 y Jaime le regala la tercera parte de las suyas. ¿Con cuántas bolitas se quedan Jaime, Pedro y Ernesto?

$$\begin{array}{r} \text{Ernesto} = 1722 \\ - 10 \\ \hline 1712 \end{array}$$

R: Ernesto se quedó con 1712 bolitas.

$$\begin{array}{r} \text{Jaime} = 246 \div 3 = 82 \\ 06 \\ \hline 04 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 246 \\ - 82 \\ \hline 164 \end{array}$$

R: Jaime se quedó con 164 bolitas.

$$\begin{array}{r} \text{Pedro} = 82 \\ - 10 \\ \hline 92 \end{array}$$

R: Pedro tiene 92 bolitas.

## Nivel 3

Reconoce que los números naturales se pueden expresar como producto de factores y los expresa en forma de potencias. Utiliza números decimales positivos y fracciones positivas para ordenar, comparar, estimar, medir y calcular. Utiliza números enteros para cuantificar magnitudes, ordenar y comparar. Comprende el significado de porcentaje y establece equivalencias entre estos y fracciones o números decimales, para calcular porcentajes simples<sup>5</sup>. Comprende y realiza las cuatro operaciones con números decimales y con fracciones. Resuelve problemas no rutinarios y/o formula conjeturas en diversos contextos, que requieren reorganizar la información disponible. Argumenta sobre la validez de un procedimiento, estrategia o conjetura planteada.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

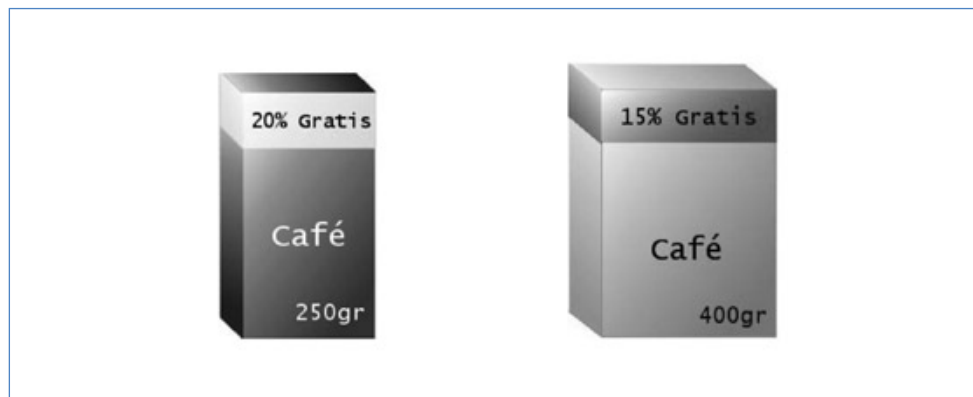
- ⦿ Resuelve problemas que involucran porcentajes, transformando el porcentaje a la fracción correspondiente. Por ejemplo: calcula el precio final de un pantalón que cuesta \$4.000, si tiene un 25% de descuento.
- ⦿ Realiza adiciones y sustracciones con fracciones y/o números decimales, sustituyendo fracciones por otras iguales cuando sea necesario. Por ejemplo, calcula:  $4\frac{1}{8} - \frac{2}{4}$ .
- ⦿ Aproxima resultados de operaciones con números decimales, redondeando los números involucrados.
- ⦿ Encuentra fracciones iguales a una fracción dada, mediante amplificación o simplificación.
- ⦿ Descompone multiplicativamente un número identificando factores. Por ejemplo: descompone el número 360 en factores primos  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$ , ó en factores como  $2 \cdot 18 \cdot 10$ ;  $6 \cdot 6 \cdot 10$ ;  $3 \cdot 12 \cdot 10$ , etc.
- ⦿ Resuelve problemas que implican ordenar números enteros. Por ejemplo: ordena de menor a mayor las temperaturas mínimas registradas en una semana del mes de julio en cierta ciudad, si estas van de  $-4^{\circ}\text{C}$  a  $5^{\circ}\text{C}$ .

<sup>5</sup> 10%, 15%, 20%, 50%, 25%, 75%

## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- La tarea**

A los estudiantes se les presentó la siguiente imagen. Se les pidió determinar cuál de los envases traía más café gratis.



- Ejemplo de trabajo en el nivel »

¿Cuál de los dos paquetes trae más café gratis? Justifica tu respuesta

Al escribir “de 250” y “de 400 gr.” en su desarrollo, asocia los porcentajes con sus respectivos referentes (cantidad de café que hay en cada envase).

Expresa el porcentaje como una fracción con denominador 100 y encuentra su valor utilizando las operaciones adecuadas.

Compara los resultados y concluye interpretando la respuesta de acuerdo al contexto.

20% de 250	15% de 400gr
$\frac{20}{100}$ de 250	$\frac{15}{100}$ de 400
$250 : 100 = 2.5 \cdot 20$	$400 : 100 = 4 \cdot 15$
500	60
El paquete de 400gr trae más café gratis	

## Nivel 4

Comprende que todo número racional es un cociente entre dos números enteros y los utiliza al estimar, establecer razones, proporciones y calcular porcentajes. Comprende la conexión entre las cuatro operaciones en los números racionales positivos y negativos. Utiliza la notación científica y las potencias de base racional y exponente entero, y sus propiedades, para simplificar cálculos. Resuelve problemas no rutinarios y/o formula conjeturas en diversos contextos en los que se deben establecer relaciones entre conceptos. Justifica la estrategia utilizada, las conjeturas formuladas y los resultados obtenidos, utilizando conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Escribe un número racional de diversas maneras. Por ejemplo: escribe en forma de fracción el número  $1,2\overline{5}$ .
- ⦿ Resuelve problemas que involucran cálculo de porcentajes usando proporciones. Por ejemplo: calcula el porcentaje de mujeres de una población si se conoce el total de la población y el total de hombres.
- ⦿ Escribe números grandes o pequeños utilizando notación científica. Por ejemplo: el tamaño de una bacteria: 0,0000002 mm como  $2 \cdot 10^{-7}$  mm; la distancia del Sol a la Tierra: 150.000.000 Km. como  $1,5 \cdot 10^8$  Km.
- ⦿ Utiliza las propiedades de las potencias para calcular el resultado de operaciones con potencias de base racional y exponente entero.
- ⦿ Usa las 4 operaciones con números enteros para realizar cálculos. Por ejemplo: “calcula  $-10 - -3$ ”, “¿Qué resultado es mayor,  $-8 : -2$  ó  $-20 : 4$ ?”, etc.
- ⦿ Ubica en la recta numérica números racionales escritos como fracción o decimal.
- ⦿ Usa las cuatro operaciones con números racionales. Por ejemplo,  $1,25 : 0,5$  y  $1\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ .

## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

### La tarea

A los estudiantes se les presentó una situación con dos alternativas, en la cual debían determinar el precio más conveniente por la compra de una bicicleta, considerando descuentos y el IVA.

Para resolver el problema, utiliza un valor referencial (\$30.000), no necesariamente un valor real. Calcula porcentajes utilizando las proporciones y realiza correctamente las operaciones para conocer el precio final de la bicicleta en ambos casos; concluye justificando el resultado utilizando conceptos y relaciones matemáticas.

### Ejemplo de trabajo en el nivel »

Gustavo fue a comprar una bicicleta de montaña a la tienda de su amigo Fidel. Al momento de pagar, Fidel le dijo: "Te haré un 25% de descuento, pero tengo que agregar el 19% de IVA. Te ofrezco dos alternativas:"

**Alternativa 1:** "Primero te hago el 25% de descuento y sobre ese precio te añado el 19% de IVA".

**Alternativa 2:** "Primero te añado el 19% de IVA y luego te hago el 25% de descuento".

¿Cuál de las dos alternativas le conviene más a Gustavo? Muestra tu desarrollo.

Alternativa 1:

$x = \frac{25}{100}$	$x = \frac{30000 \cdot 25}{100} = 7.500$	$30.000$ $- 7.500$ <hr/> $22.500$
$x = \frac{19}{100}$	$x = \frac{22.500 \cdot 19}{100} = 4.275$	$22.500$ $+ 4.275$ <hr/> $26.775$

Valor final: 26.775

Alternativa 2:

$x = \frac{19}{100}$	$x = \frac{30000 \cdot 19}{100} = 5700$	$30.000$ $+ 5700$ <hr/> $35.700$
$x = \frac{25}{100}$	$x = \frac{35.700 \cdot 25}{100} = 8925$	$35.700$ $- 8.925$ <hr/> $26.775$

Valor final: 26.775

conclusión: las 2 alternativas son favorables ya que le costaría lo mismo se utiliza la propiedad CONMUTATIVA (no importa el orden de los n° el resultado siempre dara igual).

## Nivel 5

Reconoce a los números irracionales como números decimales no periódicos que no pueden ser escritos como fracción entre dos números enteros y a los números reales, como la unión de los números racionales e irracionales. Realiza las cuatro operaciones con números reales en forma algebraica, utilizando propiedades, e identifica el conjunto numérico al que pertenecen los resultados. Utiliza las potencias de base racional y exponente racional, y sus propiedades, para simplificar cálculos, y establece la relación entre potencias y raíces. Resuelve problemas utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub-problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de conjeturas.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ⦿ Ubica en la recta numérica un número irracional. Por ejemplo:  $\sqrt{3}$ .
- ⦿ Determina aproximaciones por defecto y por exceso de un número irracional con una precisión indicada. Por ejemplo: encuentra dos decimales de la  $\sqrt{2}$ .
- ⦿ Realiza cálculos extendiendo las propiedades de las potencias a aquellas de base racional y exponente racional.
- ⦿ Resuelve problemas cuya solución es un número irracional. Por ejemplo: “Un cuadrado tiene un área de  $10 \text{ m}^2$ . Calcula la longitud de uno de sus lados”.
- ⦿ Resuelve problemas que involucran combinación de operaciones con números reales, utilizando convenciones de paréntesis, propiedades de las operaciones y prioridad de las operaciones.
- ⦿ Realiza pruebas para argumentar la validez de una conjetura. Por ejemplo: “El producto de dos números irracionales distintos es siempre un número irracional”.



## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

## • La tarea

A los alumnos se les presenta la siguiente situación: “En la siguiente tabla se presentan seis segmentos y sus respectivas longitudes en centímetros. Como puedes ver, se ha utilizado intencionalmente distintas maneras para representar la longitud de cada segmento”.

Determina aproximaciones a un número irracional con una precisión de dos decimales.

a. Distingue los números irracionales, de los números racionales, por la imposibilidad de escribirlos como fracción.

b. Resuelve problemas cuya solución es un número irracional. Infiere que al restarle un número irracional a uno racional se obtiene un número donde no es posible visualizar un período reconociéndolo como irracional.

c. Comprende que al sumar números irracionales, el resultado obtenido no siempre es irracional.

Realiza conjeturas y las verifica a través de ejemplos.

## • Ejemplo de trabajo en el nivel »

$\begin{array}{r} 2,25 \cdot 2,25 \\ \underline{450} \\ 5,0625 \end{array}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%;">AB</td> <td style="width: 40%;"><math>\sqrt{5}</math> <math>\times</math></td> <td style="width: 30%;"></td> </tr> <tr> <td>CD</td> <td><math>\sqrt{64}</math> <math>\checkmark</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>EF</td> <td><math>\sqrt{2}</math> <math>\times</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>GH</td> <td>3,1416 <math>\checkmark</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>IJ</td> <td><math>2\bar{3}</math> <math>\times</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>KL</td> <td><math>\frac{14}{3}</math> <math>\checkmark</math></td> <td></td> </tr> </table>	AB	$\sqrt{5}$ $\times$		CD	$\sqrt{64}$ $\checkmark$		EF	$\sqrt{2}$ $\times$		GH	3,1416 $\checkmark$		IJ	$2\bar{3}$ $\times$		KL	$\frac{14}{3}$ $\checkmark$		$\begin{array}{r} 2,24 \cdot 2,24 \\ \underline{448} \\ 5,0176 \end{array}$ $\begin{array}{r} 14 : 3 = 4,6 \\ \underline{20} \\ 20 \end{array}$
AB	$\sqrt{5}$ $\times$																			
CD	$\sqrt{64}$ $\checkmark$																			
EF	$\sqrt{2}$ $\times$																			
GH	3,1416 $\checkmark$																			
IJ	$2\bar{3}$ $\times$																			
KL	$\frac{14}{3}$ $\checkmark$																			

a) ¿En cuáles segmentos de la tabla su longitud corresponden a un número racional? ¿En cuáles la longitud corresponden a un número irracional? Justifica en cada caso.

*n.º racional: segmentos CD, IJ, GH y KL se pueden escribir como fracción*

*n.º irracional: AB, EF no se pueden escribir como fracción*

b) Si el segmento AB de longitud  $\sqrt{5}$  cm es colocado encima del segmento CD de longitud  $\sqrt{64}$  cm este se divide en dos trazos AB y BD como muestra la figura. Con esta información ¿La longitud del segmento resultante BD es un número racional o irracional? ¿Por qué?

*CD = 8*  
*AB =  $\sqrt{5}$*   
*BD = 8*

*Con la información que tengo creo que se podría decir que el segmento BD sería un n.º irracional ya que como  $\sqrt{5}$  también lo es, al restárselo a 8 no me daría un n.º exacto, por lo que podría caer en la categoría de irracional, no se visualiza un período*

c) ¿Qué conclusiones puedes sacar al sumar las longitudes de los segmentos AB y BD?

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} + 8 \\ 2,2361 + 8 \\ \hline 10,2361 \end{array}$$

*La conclusión que puedo sacar es que cuando se suman los irracionales pueden dar como resultado un racional*

## Nivel 6

Utiliza potencias de base real y exponente racional para resolver problemas. Reconoce a los números complejos como una extensión del campo numérico y los utiliza para resolver problemas que no admiten solución en los reales. Usa las cuatro operaciones con números complejos. Resuelve problemas, utilizando un amplio repertorio de estrategias, combinando o modificando estrategias ya utilizadas. Realiza conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones y argumenta la validez de los procedimientos o conjeturas.

### ¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Interpreta las soluciones de una ecuación cuadrática cuyo discriminante es negativo. Por ejemplo:  $x^2 + 1 = 0$ .
- Representa números complejos escritos en forma cartesiana sobre el plano complejo (plano de Argand).
- Escribe un número complejo de diferentes maneras. Por ejemplo: escribe el número real 5 como número complejo de la forma  $5 + 0i$ ; Otro ejemplo: Transforma el número complejo  $(8, -2)$  escrito en forma cartesiana a su forma binomial como  $8 - 2i$ .
- Determina el producto de dos números complejos en su forma binomial. Por ejemplo:  $(-1 + 3i)(3 - 9i)$ .
- Calcula la raíz cuadrada de números negativos para dar solución a un problema. Por ejemplo: "Un número elevado al cuadrado es  $-3$ , ¿cuál es el número?"

## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- La tarea**  
**Ejemplo1**

A los alumnos se les presenta una ecuación cuadrática que deben resolver y describir las soluciones obtenidas.

Identifica el contexto numérico en el cual la ecuación cuadrática se puede resolver. Identifica y justifica que  $\sqrt{-1}$  no pertenece a los números reales. Encuentra las soluciones complejas de la ecuación.

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

“Sea la ecuación cuadrática  $x^2 + 4 = 0$ ”

Determina las soluciones de esta ecuación, indicando a qué conjunto numérico pertenecen. Justifica tu respuesta.

$x^2 = -4$   
 $x = \sqrt{-4}$   
 $= \sqrt{-2 \cdot 2}$   
 $= \sqrt{-1 \cdot 2 \cdot 2}$   
 $= \pm 2\sqrt{-1}$

$\sqrt{-1} \notin$  a los Números Reales.  
 sino a los imaginarios  
 &  $x$  establece en este conjunto.  
 $\sqrt{-1} = i$   
 $\therefore \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$

Pero sabemos que  
 Sabemos que este  $i$  no pertenece  
 a los Reales ya que no hay número  
 que multiplicado por  $x$  mismo (de  $x^2 \rightarrow x \cdot x$ )  
 obtenga un  $i$  que este  
 en los reales, pero esta los  
 imaginarios, donde  
 $\sqrt{-1} = i$

## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

• **La tarea**  
**Ejemplo 2**

A los estudiantes se les presenta una situación en la que deben trabajar con un número irracional conocido como el número áureo. Éste es presentado en su forma algebraica y una aproximación decimal. Con esto se les solicita realizar tres acciones con éste número.

- a. Resuelve la expresión reemplazando el número irracional presentado. Opera correctamente para determinar el valor resultante.
- b. Escribe las expresiones algebraicas de los números  $\phi$  y  $\phi^{-1}$ . Reconoce que  $\phi^{-1}$  es el inverso multiplicativo de  $\phi$ . Transforma las expresiones a decimales de cinco cifras decimales, opera y con esto concluye que poseen la misma parte decimal.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

El número áureo o dorado se denota con la letra griega  $\phi$  (phi). Su expresión algebraica es

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ que al desarrollarla se obtiene el irracional } \phi = 1,61803\dots$$



a) ¿Cuál es el valor de la expresión  $\phi^2 - \phi - 1$ ?

R:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 =$$

$$\frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$$

$$\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5} - 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

b) ¿Es cierto que los números  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803$$

$$\phi^{-1} = \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = 0,61803$$

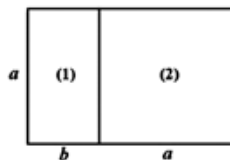
R: TIENEN LOS MISMOS DECIMALES PUES EL  $\phi$  DA COMO RESULTADO 1,61803 y  $\phi^{-1}$  DA COMO RESULTADO 0,61803

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

c. Utiliza los valores de las distintas expresiones para concluir que el rectángulo (1)+(2) es áureo, a través de valores numéricos.

Utiliza distintas aproximaciones en las expresiones, por lo que concluye sin la precisión requerida para el problema.

c) Sea la siguiente figura:



Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.

FIGURA (1)  $\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803$

FIGURA (1),(2)  $\frac{b+a}{a} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{3,236+2}{3,236} = \frac{5,236}{3,236} = 1,61803$

$\sqrt{5} = 2,236...$

R: con Aprox. ME DA CASÍ LO MISMO

**Nivel 7**  
Sobresaliente

Comprende los diferentes conjuntos numéricos, las relaciones entre ellos y los problemas que les dieron origen<sup>6</sup>. Comprende que en cada conjunto numérico se puede operar sobre la base de reglas o propiedades que pueden ser usadas para justificar o demostrar relaciones. Muestra autonomía y flexibilidad para resolver un amplio repertorio de problemas, tanto rutinarios como no rutinarios, utilizando diversas estrategias y para formular conjeturas acerca de objetos matemáticos. Utiliza lenguaje matemático para presentar argumentos en la demostración de situaciones matemáticas.

**¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño**

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ◉ Explica por qué los números complejos de la forma  $a + 0i$  se comportan como los números reales.
- ◉ Demuestra propiedades relativas a números. Por ejemplo: demuestra que el producto entre dos reales negativos es un número real positivo.
- ◉ Resuelve problemas complejos que implican la aplicación de distintos conceptos matemáticos. Por ejemplo: calcula el dinero que obtiene Juan después de 20 años si deposita en el banco \$ 500.000 al 9% de interés compuesto.

<sup>6</sup> Los enteros motivados por la sustracción, los racionales por los cocientes imposibles entre enteros, los irracionales como consecuencia de la raíz cuadrada y los imaginarios como consecuencia de las raíces de orden par de números negativos.



## Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

### La tarea

A los estudiantes se les presenta una situación en la que deben trabajar con un número irracional conocido como el número áureo. Éste es presentado en su forma algebraica y una aproximación decimal. Con esto se les solicita realizar tres acciones con este número.

a. Determina el valor de una expresión numérica, mediante operatoria con números reales. Plantea una conjetura numérica, a partir del resultado obtenido anteriormente.

b. Utiliza la conjetura anterior para demostrar la propiedad buscada.

### Ejemplo de trabajo en el nivel »

El número áureo o dorado se denota con la letra griega  $\phi$  (phi). Su expresión algebraica es

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ que al desarrollarla se obtiene el irracional } \phi = 1,61803\dots$$



a) ¿Cuál es el valor de la expresión  $\phi^2 - \phi - 1$ ?

$$\begin{aligned} \phi^2 - \phi - 1 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ \phi^2 - \phi - 1 &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{2+2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4} \\ \phi^2 - \phi - 1 &= \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4} \\ \phi^2 - \phi - 1 &= 0 \rightarrow \boxed{\phi^2 - \phi = 1} \end{aligned}$$

Se cumple que:

$$\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \dots$$

$$\boxed{\phi^n - \phi^{n-1} = \phi^{n-2}} \quad \text{Donde } n \in \mathbb{N}$$

b) ¿Es cierto que los números  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.

Si  $\phi = 1,61803\dots$  y  $\phi^n - \phi^{n-1} = \phi^{n-2}$  tenemos que:

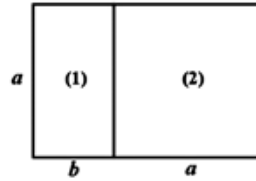
$$\textcircled{1} \quad \phi - \phi^0 = \phi^{-1}$$

$$\boxed{\phi - 1 = \phi^{-1}} \quad \begin{aligned} 1,61803\dots - 1 &= \phi^{-1} \\ \boxed{0,61803\dots} &= \phi^{-1} \end{aligned}$$

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

c. Formaliza una demostración matemática planteando explícitamente hipótesis y tesis. Encadena correctamente los argumentos para demostrar la proposición matemática. Demuestra dominio en la operatoria con raíces.

c) Sea la siguiente figura:



Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.

Si el rectángulo (1) es áureo se cumple que  $\frac{a}{b} = \phi$ , hipotéticamente diremos que:

Hipótesis:  $a = 1 + \sqrt{5}$ ,  $b = 2$   
 Tesis:  $\frac{b+a}{a} = \phi$

Demostración:

(i)  $b+a = 2 + 1 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5} \therefore \frac{b+a}{a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$

(ii)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{(1 - \sqrt{5})}{(1 - \sqrt{5})} = \frac{3 - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 5}{-1} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-1} = \frac{-2(1 + \sqrt{5})}{-2} = \phi$  Q.E.D

Anexos

---

Tareas Aplicadas  
por Nivel



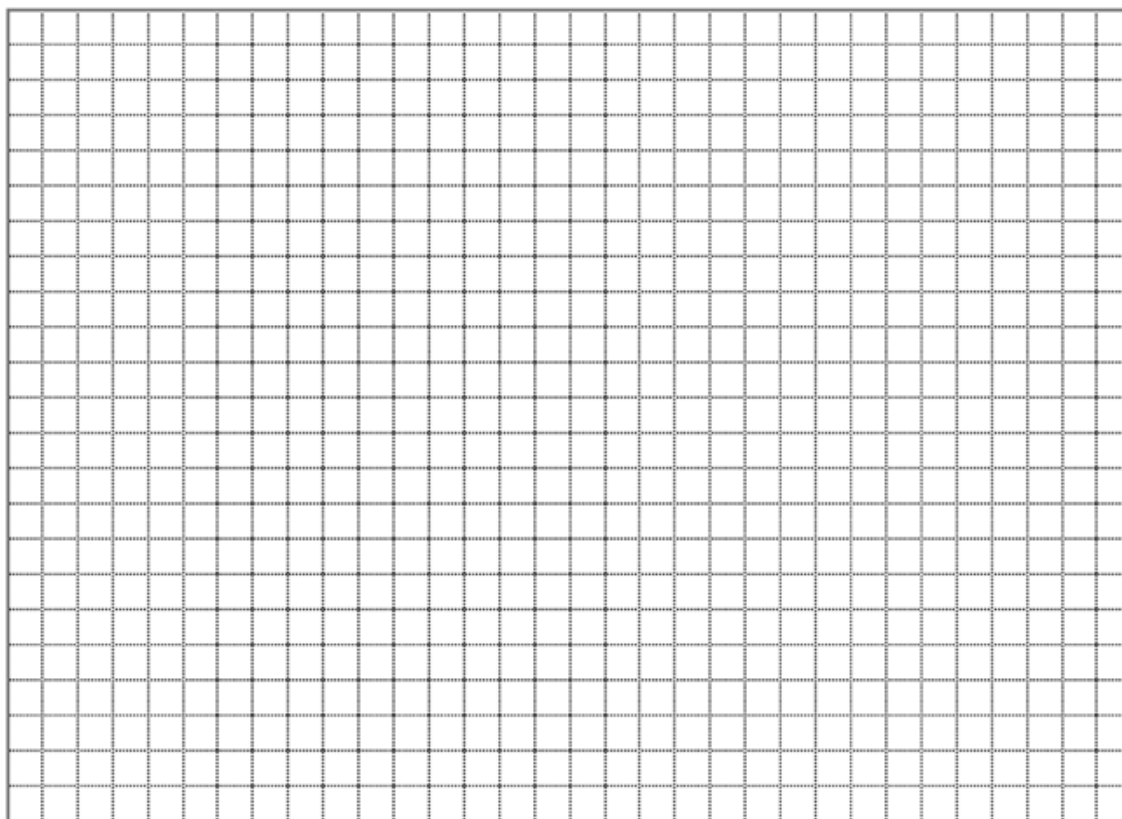


Nombre: \_\_\_\_\_

Paulina va al supermercado a comprar café y se encuentra con la siguiente oferta:



¿Cuál de los dos paquetes trae más café gratis? Justifica tu respuesta.





 Anexo

## Nivel 4 / Tareas Aplicadas

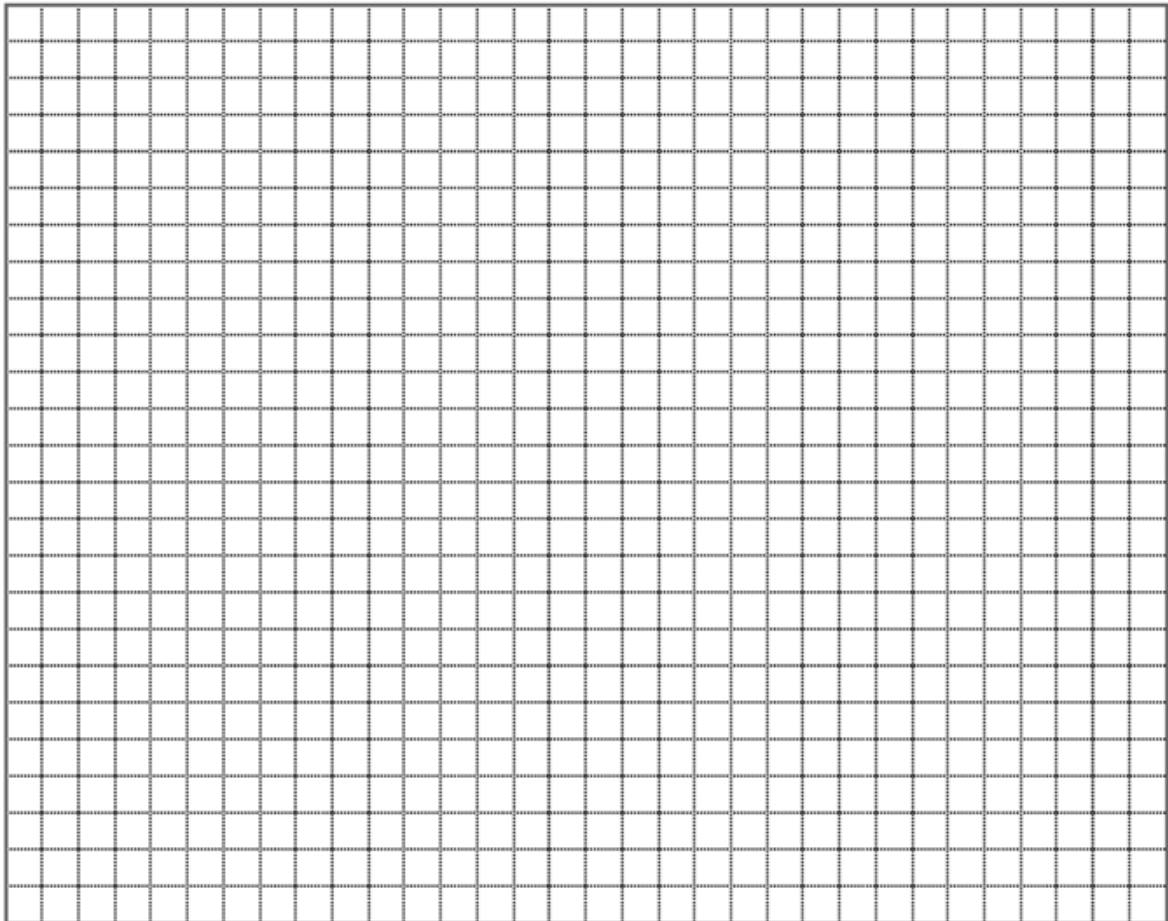
Nombre:

Gustavo fue a comprar una bicicleta de montaña a la tienda de su amigo Fidel. Al momento de pagar, Fidel le dijo: “Te haré un 25% de descuento, pero tengo que agregar el 19% de IVA. Te ofrezco dos alternativas:”

**Alternativa 1:** “Primero te hago el 25% de descuento y sobre ese precio te añado el 19% de IVA”.

**Alternativa 2:** “Primero te añado el 19% de IVA y luego te hago el 25% de descuento”.

¿Cuál de las dos alternativas le conviene más a Gustavo? Justifica tu respuesta.



 Anexo

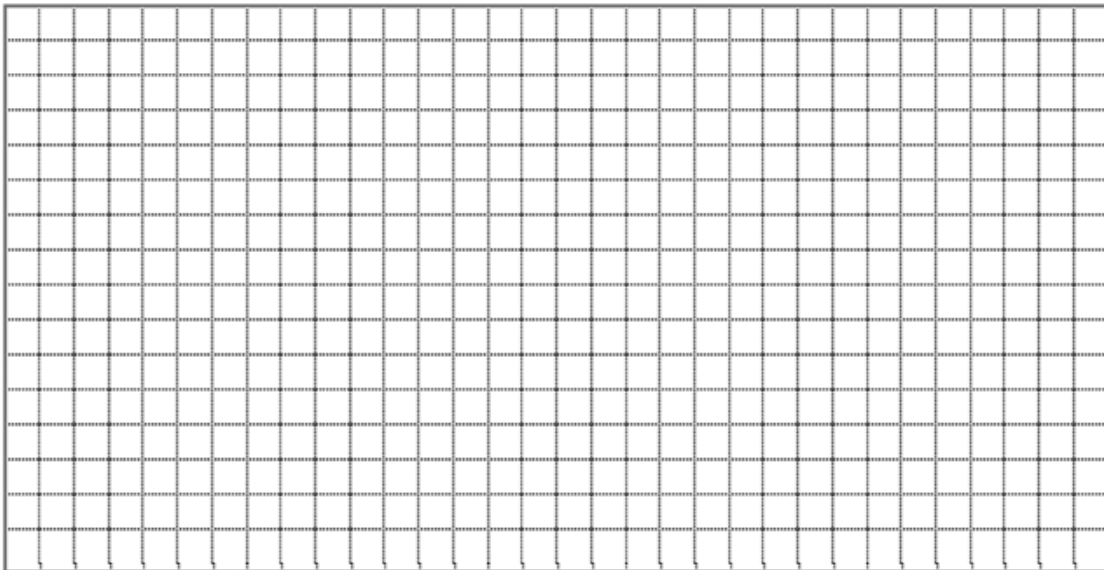
## Nivel 5 / Tareas Aplicadas

Nombre: 

En la siguiente tabla se presentan seis segmentos y sus respectivas longitudes en centímetros. Como puedes ver, se ha utilizado intencionalmente distintas maneras para representar la longitud de cada segmento.

Segmento	Longitud (cm)
AB	$\sqrt{5}$
CD	$\sqrt{64}$
EF	$\sqrt{2}$
GH	3,1416
IJ	2,5
KL	$\frac{14}{3}$

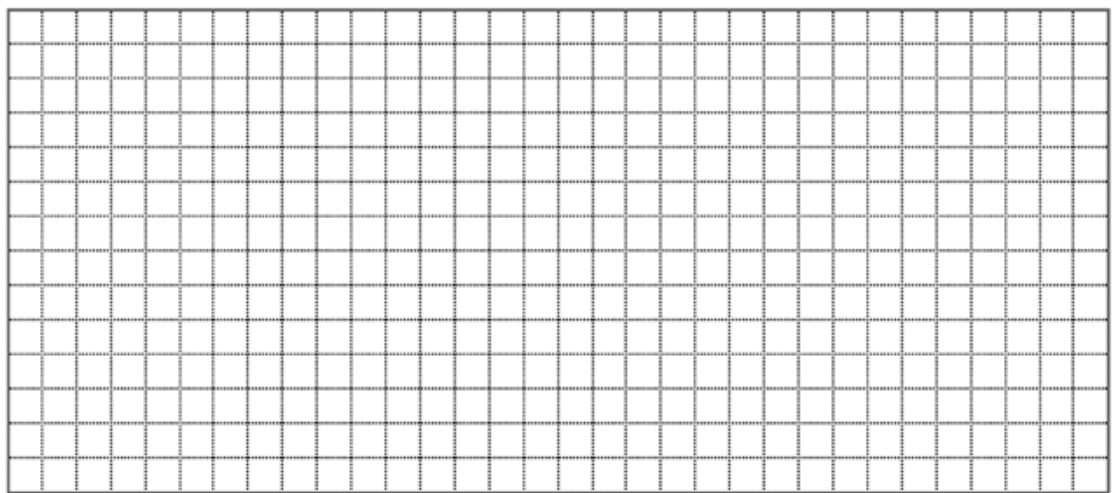
- a) ¿En cuáles segmentos de la tabla su longitud corresponde a un número racional? ¿En cuáles la longitud corresponde a un número irracional? Justifica en cada caso.



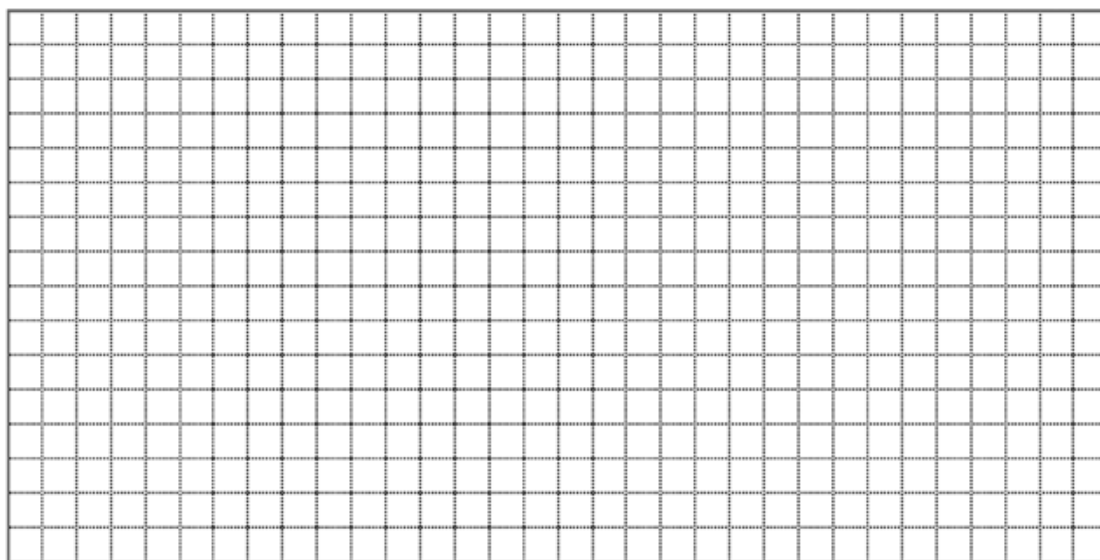
## Anexo

## Nivel 5 / Tareas Aplicadas

- b) Si el segmento AB de longitud  $\sqrt{5}$  cm es colocado encima del segmento CD de longitud  $\sqrt{64}$  cm este se divide en dos trazos AB y BD como muestra la figura. Con esta información ¿La longitud del segmento resultante BD es un número racional o irracional? ¿Por qué?



- c) ¿Qué conclusiones puede sacar al sumar las longitudes de los segmentos AB y BD?

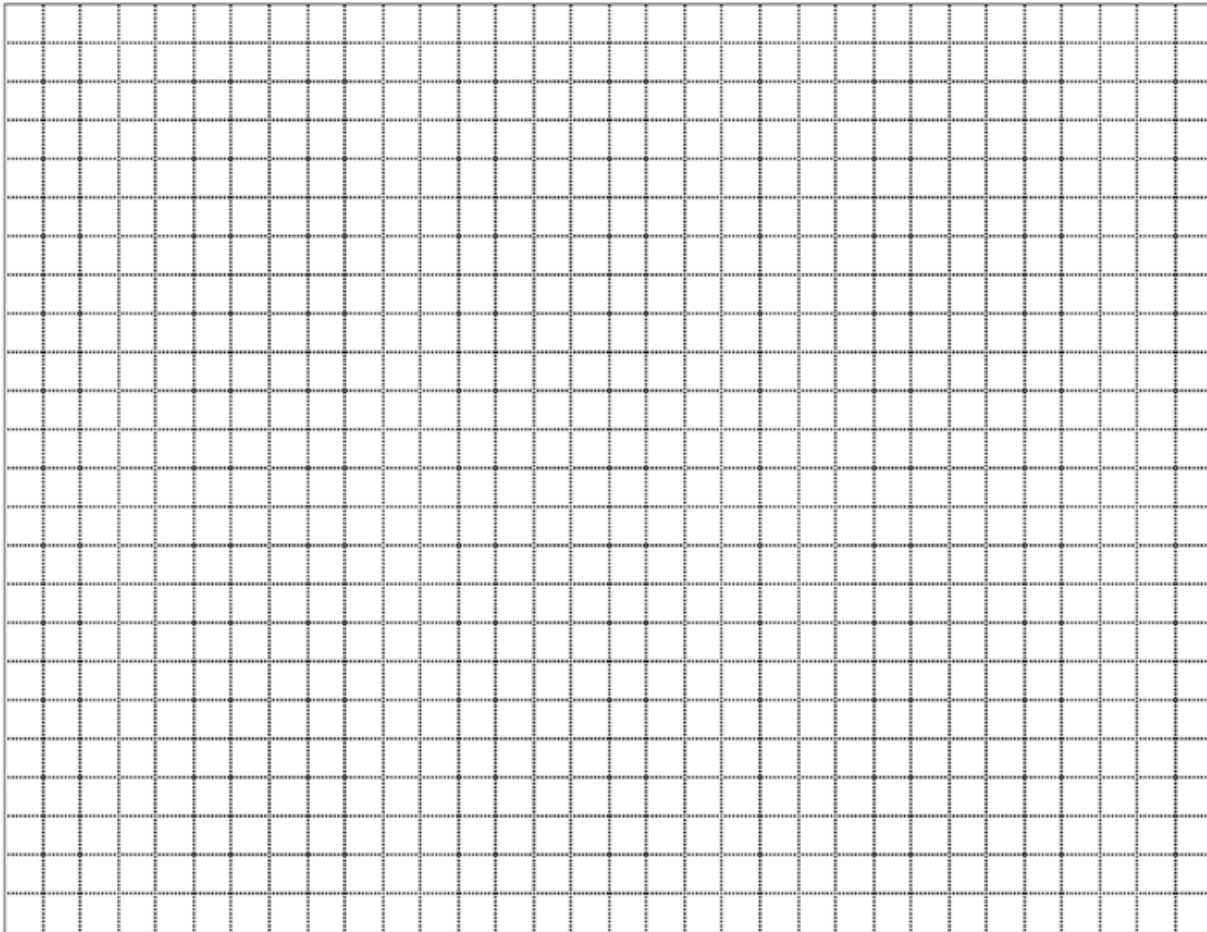


 Anexo

## Nivel 6 / Tareas Aplicadas

a) Sea la ecuación cuadrática  $x^2 + 4 = 0$

Determina las soluciones de esta ecuación, indicando a qué conjunto numérico pertenecen.  
Justifica tu respuesta.

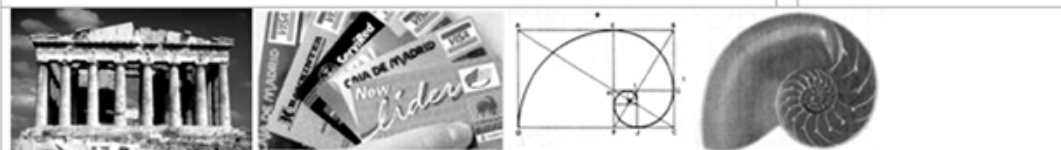


 Anexo

## Nivel 6 y 7 / Tareas Aplicadas

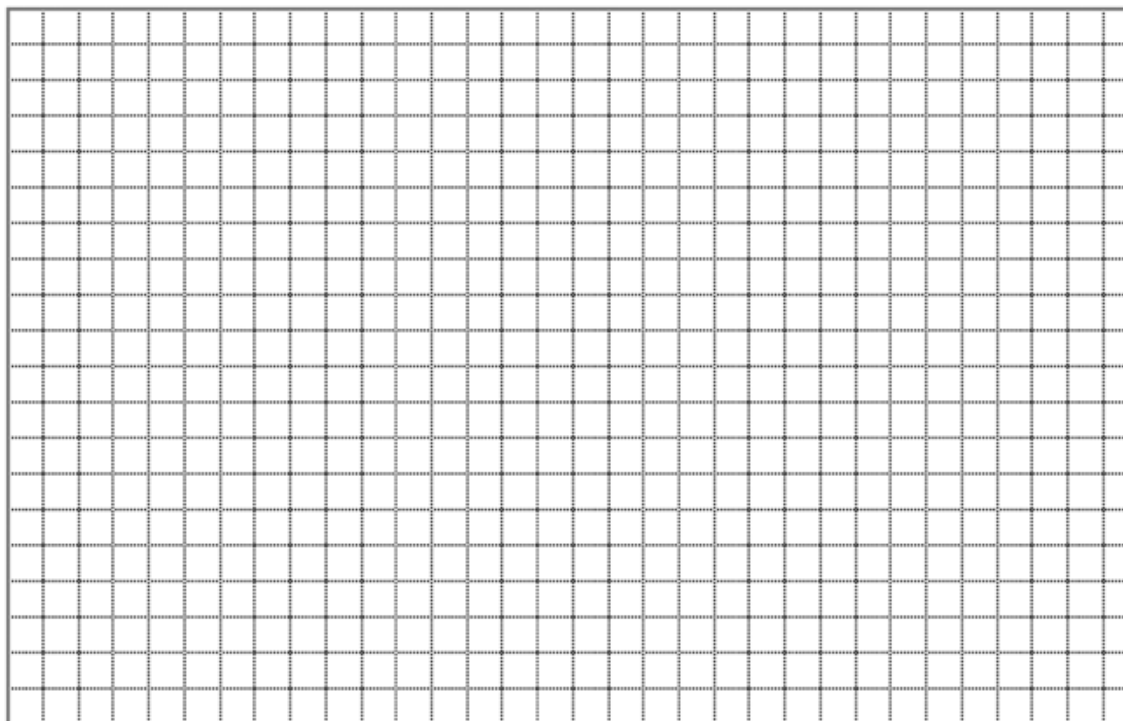
Nombre: \_\_\_\_\_

El número **áureo o dorado** se denota con la letra griega  $\phi$  (phi). Un número irracional cuya expresión algebraica es  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , que al desarrollarlo se obtiene la expresión decimal  $\phi = 1,61803\dots$  Un número nada fácil de imaginar que convive con la humanidad, ya que aparece en la naturaleza y en las proporciones del hombre y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño.



El número de oro y sus potencias poseen curiosas propiedades. De acuerdo a la expresión algebraica de  $\phi$ , desarrolla los siguientes puntos.

a) ¿Cuál es el valor de la expresión  $\phi^2 - \phi - 1$ ?

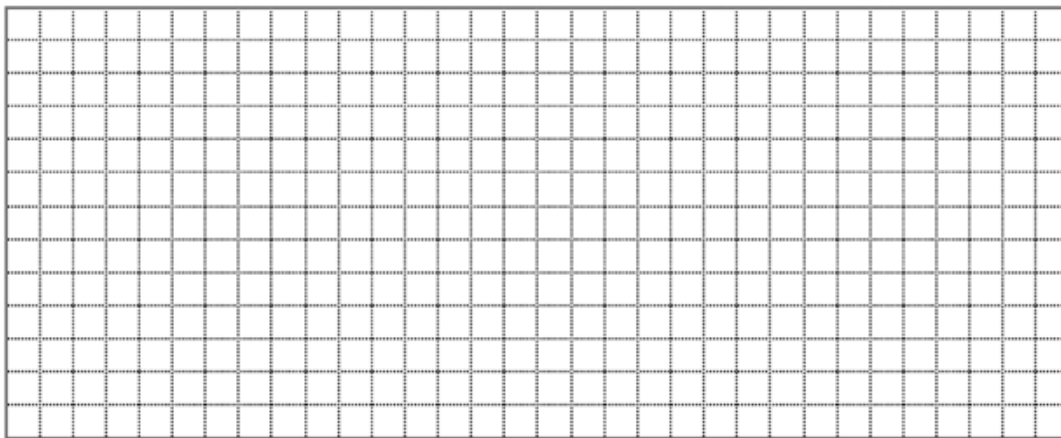




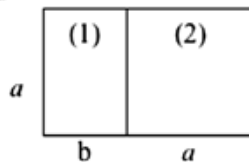
 Anexo

## Nivel 6 y 7 / Tareas Aplicadas

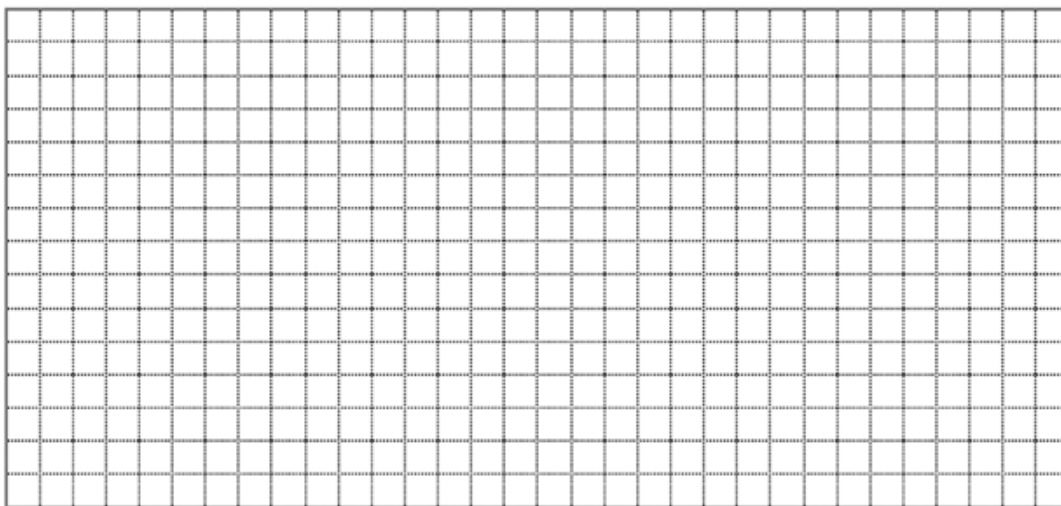
- b) ¿Es cierto que los números  $\phi$  y  $\phi^{-1}$  tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.



- c) Un rectángulo es áureo cuando la razón entre su largo ( $a$ ) y su ancho ( $b$ ) es el número dorado, es decir,  $\frac{a}{b} = \phi$ . Sea la siguiente figura:



- Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) es un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.





# Mapas de Progreso del Aprendizaje



GOBIERNO DE CHILE  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN