Colectivo de Problemas resueltos para Estudiantes de Alto Rendimiento

Autores:
Miguel Angel Moreno Núñez
Eduardo Tellechea Armenta

INDICE

Introducción

Entre la juventud sonorense, como es normal, existe una gran cantidad de muchachos, estudiantes tanto de Bachillerato como de Secundaria, que manifiestan grandes habilidades para las Matemáticas; asimismo existe una cantidad posiblemente mayor de estos estudiantes con las mismas habilidades pero que no las han manifestado. Lo que es más cierto es que la gran mayoría de los estudiantes de estos niveles, ocultan a propósito o no, su capacidad natural de desarrollar habilidades para las Matemáticas. Este es un reconocido problema social, psicológico, escolar y hasta familiar.

En la Universidad de Sonora, concientes de esta problemática, se ha gestado un interés natural entre los profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas para contribuir a su solución, no solo en el nivel superior como es su tarea principal, sino en los niveles previos que es donde de manera temprana se puede incidir en la detección de las mencionadas habilidades, así como fomentar el desarrollo de ellas, en aquellos estudiantes que manifiesten interés.

Por ello, se hace, pues, una invitación, para que tanto estudiantes talentosos o inquietos, como profesores concientes hagamos un esfuerzo extra e impulsemos la actividad constante alrededor de la OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS. Una variable de mucha influencia en esta problemática es la comunicación, por ello hemos hecho el esfuerzo de publicar esta información y una compilación de problemas, para que estando en tus manos, te decidas a participar en estos concursos como estudiante o como conductor de actividades.

Con la publicación de esta información queremos contribuir también con los ya tradicionales concursos que se llevan a cabo en distintas partes del Estado y que de una forma u otra han hecho posible la integración de Delegaciones de estudiantes sonorenses de bachillerato que han participado desde 1988 en las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas.

Acerca de las Olimpiadas de Matemáticas

Objetivos

1. Difundir la Matemática como una ciencia viva, que para su práctica requiere, además de una buena información, de la creatividad y la participación activa por parte de los estudiantes.
2. Promover la reflexión entre los profesores del nivel superior y del nivel medio superior acerca de la enseñanza de esta ciencia, y acerca de los contenidos de planes y programas de Matemáticas en Bachillerato.
3. Integrar una Selección de a lo mas seis estudiantes que represente al estado de Sonora en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, cuya décimo quinta edición, se realizará en Noviembre de 2001 en Cuernavaca, Morelos.

A la Olimpiada Sonorense de Matemáticas acuden representaciones de todos los subsistemas de bachillerato en el Estado, quienes conforman una selección interna mediante la realización de concursos u otros mecanismos para integrar su representación. Aunque la representación en el concurso preselectivo y el concurso estatal es considerada como individual, la promoción es a través de los subsistemas de bachillerato.

Tratando de que, para el año 2002, la Selección Sonora continúe integrándose mediante un procedimiento que garantice una mejor representatividad, tanto en lo que se refiere al nivel de conocimiento matemático del alumnado, como de las diferentes alternativas con que cuenta el nivel medio superior en el Estado, se tienen contempladas tres etapas previas al nacional. Dentro de éstas, se encuentran varios concursos que garantizan la participación de alumnos de todas las escuelas preparatorias y secundarias, y varias acciones para que estos reciban una orientación adecuada hacia el logro de los objetivos que la SMM se plantea y que la organización de la Olimpiada Estatal retoma. Dichas etapas se describen enseguida.

ETAPA I : INTEGRACIÓN DE LA PRESELECCIÓN

El objetivo de esta etapa consiste en integrar una preselección estatal mediante la realización de dos tipos de concurso: interno y abierto. Los concursos internos son los que se realizan al interior de cada subsistema y que incluyen a los concursos por plantel, mientras que el abierto es el Concurso Preselectivo Estatal, que realiza la Universidad de Sonora y en el que pueden participar estudiantes de cualquier subsistema de preparatoria o de secundaria que reúna los requisitos.

ETAPA II: INTEGRACIÓN DE LA SELECCIÓN

El objetivo de esta etapa es el entrenamiento de preseleccionados y la selección de seis estudiantes que representarán a Sonora en el Concurso Nacional.

El entrenamiento inicia al finalizar el concurso abierto con la distribución de los primeros materiales de estudio y con las asesorías que los propios profesores de los preseleccionados les puedan brindar. Se lleva a cabo el entrenamiento, regularmente en tres fines de semana, obteniendo al final la selección de seis estudiantes que integran la delegación Sonora..

E T A P A III: CONCENTRACIÓN FINAL

El objetivo de esta etapa consiste en la concentración de la selección para afinar los detalles de su participación en el concurso nacional.

En esta parte se hará hincapié en el tipo de problemas que se manejan en Olimpiadas Mexicanas, los procedimientos de evaluación que se siguen, las perspectivas que se abren y las formas de premiación.

ACCIONES COMPLEMENTARIAS

Lo anterior va acompañado de las siguientes acciones que, con la aceptación y colaboración de los diferentes subsistemas de bachillerato, asegurarían el buen término de lo planteado:

1.- Integración de un Comité de Asesoría Académica para todos los concursos a realizar en el Estado, el cual está actualmente constituido de la siguiente forma:

Miguel Angel Moreno Núñez (Delegado Estatal de la OMM), Eduardo Tellechea Armenta profesor de tiempo completo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, Alfonso Martínez Zepeda, tesista de la Licenciatura en Matemáticas y un grupo de colaboradores estudiantes y maestros del mismo departamento.

2.- Elaboración de problemarios para las distintas etapas del entrenamiento..

3.- La motivación, orientación y preparación de estudiantes tanto a nivel plantel como de subsistema, a través de profesores y directivos.

SONORA EN LAS OLIMPIADAS NACIONALES

Sonora ha participado en las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas desde 1988 en que se realizó la segunda edición de éstas y que tuvo como sede la Universidad de Sonora, en su Unidad Hermosillo. La primera invitación se dió para el año de 1987, sin embargo sólo se asistió en calidad de observador.

La mecánica para la integración de la selección Sonora ha tenido pocas variantes desde su inicio en el año de 1988:

Hasta el año de 1992 la Selección Estatal se integraba a partir de un concurso abierto de carácter estatal, preseleccionándose a diez estudiantes a quienes se les proporcionaba un entrenamiento y de los cuales se integraba una selección de seis, tomando como base la aplicación de dos evaluaciones finales.

A partir de 1993, con el apoyo logístico de la Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno del Estado de Sonora (SEC), se ha logrado la participación de todos los subsistemas de Bachillerato en el Estado, seleccionando mediante sus propios mecanismos a los estudiantes que los representan en la Preselección Estatal. Una vez integrada esta Preselección se les proporciona un entrenamiento de aproximadamente 40 horas, integrando una Selección Estatal de seis integrantes, tomando como base la aplicación de una evaluación final.

Los lugares ocupados por los representantes estatales en los concursos nacionales han sido meritorios y se confía en que es posible tener un papel significativamente mejor con la participación institucional de profesores y directivos del Nivel Medio Superior.

En las participaciones mencionadas se han obtenido los siguientes lugares:

SEGUNDA OLIMPIADA (1988), Hermosillo, Son.

- Martín Eduardo Frías Armenta (primer lugar)
  Bachillerato del Intituto Tecnológico de Nogales
- Gabriela G. Hinojosa Palafox (primer lugar)
  CBTIS No.11, Hermosillo
- Raúl Garibay Alonso (segundo lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón
- Ramón A. Galindo Alvarez (tercer lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón

TERCERA OLIMPIADA (1989), Metepec, Pue.

- Pablo Félix (segundo lugar)
  CBTIS No.37, Cd. Obregón
- Marcelo Save (tercer lugar)
  CBTIS No.11, Hermosillo
- Alejandro Varela (tercer lugar)
  CBTIS No.128 Nogales

CUARTA OLIMPIADA (1990), Guanajuato, Gto.

- Roberto Sanabria Enzástiga (segundo lugar)
  CBTIS No.11, Hermosillo
- Miguel V. Ayala Corona (tercer lugar)
  CBTIS No.11 Hermosillo
- Gabriela Isabel Quintero G. (tercer lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón
- Luis Armando Rocha Grijalva (tercer lugar)
  CBTIS No.11 Hermosillo

QUINTA OLIMPIADA (1991), Oaxtepec, Mor.

- Arturo Ruiz Yeomans (segundo lugar)
  CBTIS No.11, Hermosillo
- Ignacio Alvarez M. (tercer lugar)
  CBTIS No.128 Nogales
- Ricardo Figueroa Mimbela (tercer lugar)
  CBTIS No.37, Cd. Obregón
- Rubén Flores Díaz Chavez (tercer lugar)
  CBTIS No.11, Hermosillo
- Alán Daniel Robles A. (tercer lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón

SEXTA OLIMPIADA (1992), La Trinidad, Tlax.

- José Manuel Armenta Ruiz (tercer lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón
- Carlos Omar Valenzuela A. (tercer lugar)
  CBTIS No.37 Cd. Obregón.

SÉPTIMA OLIMPIADA (1993), Acapulco, Gro.

- Abelardo Mayoral Fierros ([1]) (segundo lugar)
  COLEGIO REGIS, Hermosillo
- Juan Carlos Espinoza Armendáriz. (tercer lugar)
  CBTIS No.37, Cd. Obregón
- Luis Alán Valiente Montaño (tercer lugar)
  CBTIS No.37, Cd. Obregón

([1]) Representó a México en la Olimpiada Internacional de la cuenca del Pacífico 1994.

OCTAVA OLIMPIADA (1994), Guadalajara, Jal.

- Carlos Tapia Velasco ([2]) (Primer lugar)
  COLEGIO REGIS, Hermosillo
- Juan Carlos Espinoza Armendáriz. ([3]) (segundo lugar)
  CBTIS No.37, Cd. Obregón
- Nora Gricelda Díaz Chávez (tercer lugar)
  INSTITUTO LASALLE, Cd. Obregón
- José Antonio Santacruz Uriarte (tercer lugar)
  INSTITUTO LASALLE, Cd. Obregón

([2]) Formó parte de la Preselección Nacional y participó en una serie de entrenamientos en el interior de la República. Además representó a México en la Olimpiada Internacional de la cuenca del Pacífico 1995.

([3]) Representó a México en la Olimpiada Internacional de la cuenca del Pacífico 1995.

NOVENA OLIMPIADA (1995), Colima, Col.

- Víctor Soto Verdugo (tercer lugar)
  CBTIS No. 37, Cd. Obregón
- Javier Ernesto Maldonado Camou (tercer lugar)
  COL. REGIS, Hermosillo.

DÉCIMA OLIMPIADA (1996), Mérida, Yucatán

- Víctor Soto Verdugo (segundo lugar)
  CBTIS No. 37, Cd. Obregón
- José Francisco Pérez Avila (tercer lugar)
  COL. REGIS, Hermosillo.

DÉCIMO PRIMERA OLIMPIADA (1997), Monterrey, Nuevo León

- Jesús Francisco Espinoza Fierro (Segundo Lugar)
  CBTIS No.64, Navojoa.
- Sebastián Zepeda García (Tercer Lugar)
  COBACH Reforma, Hermosillo, Sonora.
- Beatriz Eugenia Burrola Gabilondo (Tercer Lugar)
  Colegio Regis, Hermosillo, Sonora.

DÉCIMO SEGUNDA OLIMPIADA(1998), Querétaro, Qro.

- Víctor Manuel Gámez Grijalva (Segundo Lugar)
  COBACH Villa de Seris, Hermosillo, Sonora.
- Eunice Yadhira Leyva Córdova (Tercer Lugar)
  COBACH Reforma, Hermosillo, Sonora
- Renato Peralta Rodríguez (Tercer Lugar)
  CBTIS 37, Cd. Obregón, Sonora.
- Oriol Soto Quintero (Mención Honorífica) ([4])
  Instituto Ateneo, Cd. Obregón Sonora.

([4])La mención honorífica es una distinción que se otorga a los concursantes que resolvieron un problema completo, pero no tuvieron suficiente calificación para llegar a Tercer lugar.

DÉCIMO TERCERA OLIMPIADA(1999), Oaxaca, Oax..

- Daniel Barrón Gaxiola (Tercer lugar)
  Escuela Secundaria General No. 4, Cd. Obregón Sonora.
- Jesús A. Bracamonte Dick (Tercer Lugar)
  Preparatoria del Instituto Soria, Hermosillo, Sonora

DÉCIMO CUARTA OLIMPIADA(2000), Morelia, Mich.

- Stephanie Reina Valdez (Tercer Lugar)
  COBACH, Caborca, Sonora
- Daniel Barrón Gaxiola ([5]) (Tercer Lugar)
  CBTIS No 37, Cd. Obregón, Sonora.
- Marco Antonio Figueroa Ibarra ([6])   (Tercer Lugar)
  Escuela Secundaria General No 5, Hermosillo, Sonora
- Gustavo Ramón Félix Domínguez (Tercer Lugar)

Preparatoria del Instituto Soria; Hermosillo, Sonora

- José Ángel Blancarte Hernández (Tercer Lugar)
  COBACH Villa de Seris, Hermosillo, Sonora

([5]) Preseleccionado para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, año 2001.
([6]) Medalla de oro en la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, año 2001.

En la obtención de estos resultados ha influido favorablemente la motivación y el apoyo que los estudiantes han recibido en la institución de procedencia. Es notorio que en varias de las escuelas cuyos nombres aparecen en el listado anterior se han organizado clubes o talleres de matemáticas que han establecido un ambiente propicio para los concursos.

Por labores como las señaladas en el párrafo de arriba, debe extenderse un reconocimiento a los profesores: Evaristo Ponce Correa (Hermosillo), Carlos Alberto Mladosich López (Cd. Obregón) y Jesús Grijalva Ayala (Cd. Obregón).

De 1995 a 1998 se destacó la participación entusiasta de la profesora Ma. de Lourdes Espinoza Magaña, sobre todo en su labor organizativa y de impulso al evento.

Desde 1998 contamos con la colaboración del Profesor Alfonso Martínez Zepeda , quien ha participado como entrenador de la preselección y Selección estatal, así como profesor acompañante en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

A partir del año 2000, hemos contado con la colaboración de la Maestra Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez, quien ha participado en el entrenamiento previo al Concurso Regional de Física y Matemáticas (Preselectivo) y como instructora en los Talleres de entrenamiento a la Preselección Estatal y a la Selección Estatal

Seguramente que existen otros profesores cuyo apoyo ha quedado en el anonimato y a quienes se les conmina a continuar con su loable labor académica, así mismo, se aprovecha la ocasión para extender la invitación a que más profesores dediquen un poco de su tiempo en torno a lo planteado a lo largo del presente documento.

Queremos también expresar nuestro agradecimiento a Ivone Huerta Urquijo, por el apoyo técnico brindado.

COMITÉ ESTATAL DE LA OLIMPIADA SONORENSE DE MATEMÁTICAS

M.C. Miguel Angel Moreno Núñez (Delegado Estatal)
M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
M.C. Eduardo Tellechea armenta
P.L.M. Alfonso Martínez Zepeda

Problemario

1. El triángulo *ABC* está inscrito en el semicírculo *K*, siendo *AB* el diámetro de *K*. Sea D el punto de intersección de AB con la altura desde C del triángulo *ABC*. Dibujemos el círculo *Q* que es tangente a *CD*, *AB* y *K*. Sea *H* el punto de contacto entre *Q* y *AB*. Probar que el triángulo *BCH* es isósceles.

2. Probar que algún múltiplo positivo de 21 tiene al 241 como sus últimos tres dígitos.

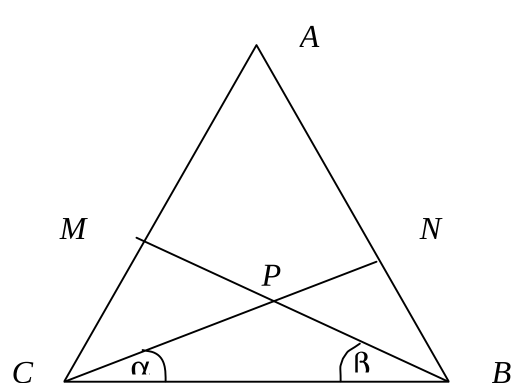
3. Sea *ABC* un triángulo rectángulo con ángulo recto en *B* y sea *H* el punto de intersección del lado *AC* y la altura por perpendicular a *AC*. Llamemos r, r_1 y r_2 a los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos *ABC*, *ABH* y *HBC*, respectivamente. Pruebe que los radios satisfacen la igualdad $r = r_1^2 + r_2^2$.

4. Suponga que se quiere expandir la expresión $(x + y + z)^{17}$. ¿Cuál es el coeficiente del término $x^2y^5z^{10}$?.

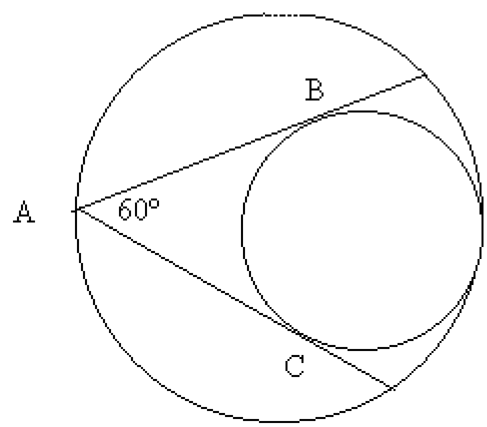
5. Considérese un triángulo *ABC* en el que la longitud de *AB* es 5, las medianas por *A* y *B* son perpendiculares entre sí y el área es 18. Hallar las longitudes de los lados *BC* y *AC*.

6. Hallar la suma $1 + 11 + 111 + \ldots + 111\ldots1$, si el último sumando es un número de n cifras.

7. En la figura tenemos que $AC = AB$ y $<\alpha = <\beta$. Probar que $MP = PN$ y $AM = AN$.



8. En la figura, el área del círculo mayor es 1 m^2. El círculo menor es tangente a la primera circunferencia y a los lados del ángulo inscrito que mide 60º. ¿Cuál es el área del círculo menor?.



9. Verificar que la siguiente igualdad es cierta

   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

10. Sea $ABCD$ un paralelogramo de área 10 cm^2, con AB = 3 cm y BC = 5 cm . Localizar E, F y G sobre los segmentos AB, BC y AD respectivamente, de tal manera que $AE = BF = AG$ = 2cm .Sea H el punto de intersección del segmento CD con la línea paralela EF que pasa por G. Calcula el área del cuadrilátero $EFHG$.

11. Verificar que entre tres enteros positivos consecutivos hay uno divisible por 3.

12. Determine (si es que existe) un entero positivo n que resuelva la ecuación siguiente: $\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n} = \dfrac{1996}{1997}$.

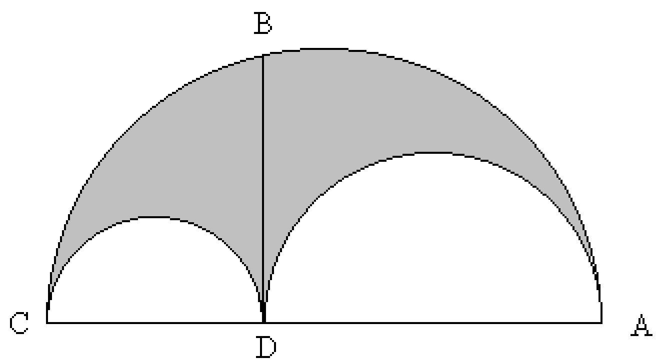
13. Encuentre la solución a la ecuación: $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$.

14. Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos son iguales a 505, 233 y 52 hectáreas. ¿Cuál es la superficie del campo triangular?.

15. Calcular la suma de los cuadrados de los 100 primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1 y que la suma de los términos de lugar par vale 1

16. Una cazuela cilíndrica se pone al fuego encima de una cruz de metal formada en ángulo recto. Por un descuido la cazuela no se coloca justo en el centro. Desde donde la estamos observando podemos ver que el círculo de la parte inferior intersecta las barras de metal en 6, 8 y 15 cm.
    i) ¿Cuál es el diámetro de la cazuela?.
    ii) ¿A qué distancia intersecta la cazuela a la cuarta barra de metal?.

17. La figura encerrada por tres semicírculos tangentes entre sí en sus extremos es llamada cuchillo del zapatero. Demuestre que su área es igual al área del círculo que tiene como diámetro el segmento *BD*, perpendicular al diámetro *CA*



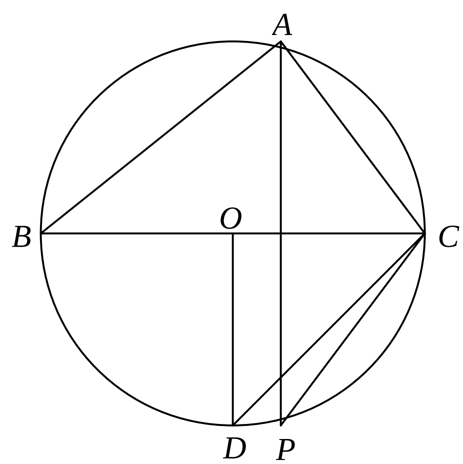
18. Probar que la suma de los cubos de tres números enteros consecutivos es divisible por 9

19. Pruebe que la suma de cuatro números enteros positivos consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.

20. Pruebe que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cubo perfecto.

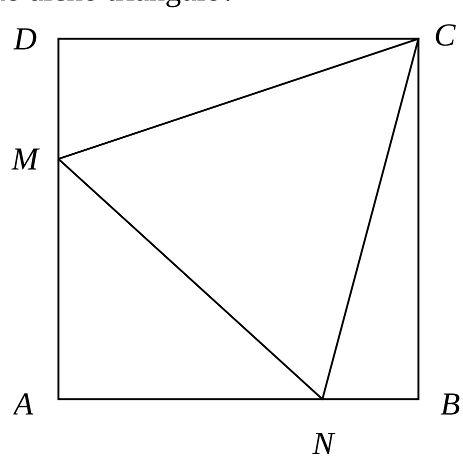
21. ¿ Para qué valores de a, es $(5a + 1)(3a + 2)$ divisible por 15 ?

22. Sea ΔABC un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O. Sean D y P las intersecciones con la circunferencia de las rectas perpendiculares a BC trazadas desde O y A respectivamente, como se muestra en la figura. Si el ángulo $\angle DCP=15^{\circ}$. ¿ Cuánto mide el ángulo $\angle BCA$?

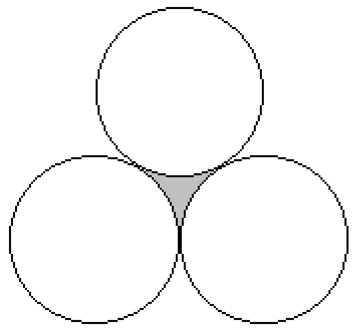


23. Para cuáles enteros positivos n se cumple que $\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es una fracción irreductible?

24. En la figura se muestra un cuadrado de lado igual a uno. Si el ΔCMN es un triángulo equilátero que se traza en el interior del cuadrado como se especifica en la figura, ¿cuánto vale el área de dicho triángulo?



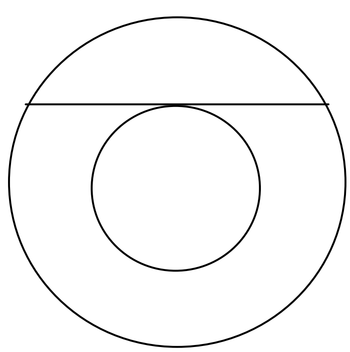
25. Cuál es el área de la región sombreada en la figura, en donde las circunferencias son todas de radio *r* ?



26. Tenemos una habitación cuadrada. El piso de la habitación está cubierto con losetas blancas formando una cuadrícula de *n* x *n* . Si trazamos una recta que vaya de una esquina de la habitación a la esquina opuesta y pintamos de rojo la mitad inferior del piso determinada por la diagonal, ¿ cuántas losetas tenemos que por lo menos tengan un pedazo pintado de rojo ?.

27. Se amarra una cinta alrededor del ecuador de la tierra y otra alrededor del perímetro (ecuador) de la luna (suponiendo que tanto la tierra como la luna tienen una forma esférica perfecta). Supongamos que ambas cintas se separan un metro de la superficie todo lo largo del perímetro. Sea *A* la cantidad de cinta que hay que añadirle a la cinta de la tierra y *B* la cantidad de cinta que hay que añadirle a la cinta de la luna para que se cierren. ¿ Qué proporción hay entre *A* y *B* ?.

28. Supongamos que tenemos dos círculos concéntricos de radios *R* y *r* respectivamente. Supongamos además que una secante del círculo mayor, que es tangente al círculo menor tiene longitud 5 cm, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del anillo?.



29. ¿ Cuántos dígitos "2" se necesitan para escribir todos los números enteros desde el 1 hasta el 10^{2000} ?

30. Sea n un entero positivo. Demostrar que si $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, $n+1$ será la suma de tres cuadrados perfectos.

31. Sea ABC un triángulo. Sean P, Q y R (respectivamente) los puntos medios de los lados AB, BC y AC. Sea S el punto de intersección entre el lado AB (o su prolongación) y la bisectriz del ángulo PRQ. Demostrar que el triángulo PRS es isósceles.

32. Sean a_1 , a_2 , a_3 y a_4 cuatro enteros consecutivos. Demostrar que $a_1a_2a_3a_4+1$ es un cuadrado perfecto.

33. Sea n un entero positivo tal que $n + 1$ resulte ser un cuadrado perfecto y sea p uno cualquiera de los divisores primos de n. Demostrar que la ecuación cuadrática $p^2x^2 + 2px - n = 0$ tiene al menos una solución entera.

34. Considérese la sucesión: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... ¿Cuál sería el término 2000?.

35. Encuentre el resultado de la siguiente suma:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

36. Sea ABCD un cuadrado en el cual tenemos inscrito otro cuadrado $EFGH$ cuyos vértices se encuentran ubicados en los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. A su vez tenemos un círculo de área ***a*** inscrito en el cuadrado $EFGH$. Encuentre el área del cuadrado $ABCD$ en función de ***a.***

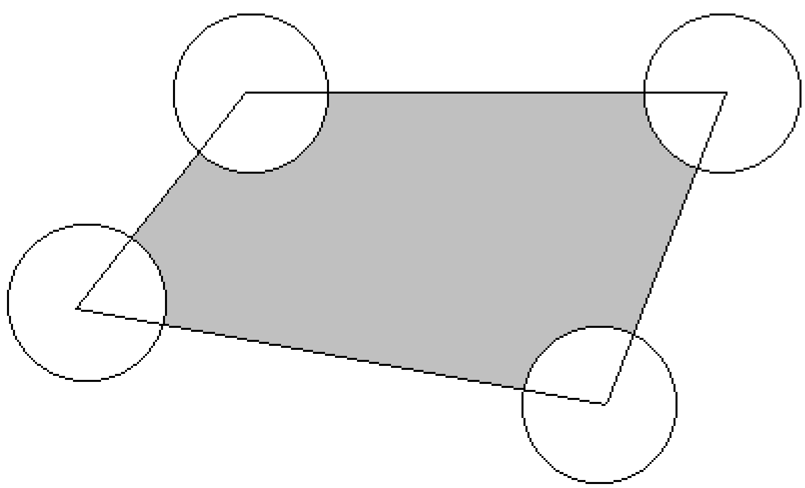
37. Ana ha decidido salir a caminar exactamente un kilómetro cada día. Vive en una ciudad cuadriculada de 5km x 5 km, en la que cada cuadra mide 100 m x 100 m y su casa está en una esquina del centro. ¿ Durante cuántos días puede hacer recorridos distintos, si siempre empieza los recorridos saliendo de su casa y terminando también en ella, pero sin repetir ningún otro punto en el recorrido de

cada día ?. (NOTA: Recorridos de días distintos pueden tener partes en común e inclusive determinar el mismo camino pero en sentido contrario).

38. Manteniendo todo el tiempo una abertura de 2cm en el compás, dibujemos una flor como sigue: tracemos una circunferencia C. Con centro en cualquier punto de C, tracemos un arco de circunferencia dentro de C, hasta intersectar C con los dos extremos del arco. Después con centro en cualquiera de esas intersecciones, tracemos otro arco de circunferencia como el anterior. Continuemos haciendo lo mismo hasta obtener la flor completa. Calcular el perímetro de la flor.

39. Hallar la suma de todos los números que son permutaciones de los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5. Esto es 12345 + 12354 + ... + 54321.

40. Considere un cuadrilátero cualquiera con área igual a 5 y lados mayores o iguales a 2. Se tienen cuatro circunferencias de radio 1, con centro en cada uno de los vértices del cuadrilátero. Encontrar el área sombreada de la figura. (La figura no está a escala).



41. Los números naturales a y b son tales que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es entero. Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$.

42. a) Pruebe que un polígono convexo de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

b) Pruebe que si $n > 4$, se tiene que $(n\text{-}2)^2 < n(n\text{-}3) < (n\text{-}1)^2$.

c) ¿Cuál es el polígono que tiene 119 diagonales?.

43. El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

44. Demostrar que para todo número primo p distinto de 2 y 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma 111...1 (escritos sólo con unos)

45. Escrito el triángulo aritmético:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1991 & 1992 & 1993 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 3983 & 3985 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 7968 & & \\
& & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & &
\end{array}
$$

donde cada número es la suma de los dos que tiene encima (cada fila tiene un número menos y en la última sólo hay un número). Razonar que el último número es múltiplo de 1993.

46. Encuentre todos los triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa enteros, sabiendo que el otro cateto es igual a $\sqrt{1988}$.

47. Calcule el producto de todos los enteros positivos que sean menores que 100 y tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

48. Sea ABC un triángulo acutángulo. Para cada punto P dentro o en la orilla de ABC, trácense las perpendiculares X_p, Y_p, Z_p a los lados BC, AC y AB respectivamente. ¿En qué punto P, la suma $X_p + Y_p + Z_p$ alcanza su máximo?

49. Sea ABC un triángulo acutángulo. Inscríbase un cuadrado $EFGH$ en el triángulo de tal manera que G y H estén sobre AB, E esté sobre AC y F sobre CB. Calcular el lado l del cuadrado en términos de la longitud de AB y de h, la altura por C del triángulo ABC.

50. Pruebe que si x, y son números enteros y 3 divide a $x^2 + y^2$, entonces 3 divide a x y también 3 divide a y.

51. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden construir de tal manera que su área sea menor o igual a 26,950, uno de los catetos mida 5 y el otro cateto tenga como medida un divisor de 26,950?.

52. Probar que el número $\underbrace{111...1}_{2r\ cifras} - \underbrace{222...2}_{r\ cifras}$ es un cuadrado perfecto para toda r.

53. Pruebe que si P es un pentágono, existen un par de ángulos interiores consecutivos de P cuya suma de sus medidas es al menos 216º.

54. Se tienen n focos numerados del 1 al n. Supóngase que todos están apagados y cada uno está conectado a un apagador. Una sucesión de n personas va apagando y prendiendo los focos según la siguiente regla: La primera persona cambia de posición todos los apagadores; la segunda cambia de posición los apagadores 2,4,6,8, ... ; la tercera cambia de posición los apagadores 3,6,9,12, ... ; y así sucesivamente hasta la última persona que sólo cambia la posición del apagador n. ¿Qué focos quedan prendidos al final?.

55. Considere el triángulo rectángulo ABC con $BC = 3$, $AB = 4$ y $CA = 5$. Bisecte el ángulo C y llame O al punto de intersección de esta bisectriz con el cateto AB. Después trace el círculo con centro en O y radio OB. Si PQ es el diámetro que coincide con la bisectriz, muestre que $\frac{CP}{PQ}$ es la razón áurea. ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

56. De los números de 4 cifras que son múltiplos de 9 ¿cuántos hay que tienen todas sus cifras distintas de cero y distintas entre sí?.

57. Considere todos los triángulos ABC con base fija AB y cuya altura desde C es una constante h. ¿Para cuál de esos triángulos es el producto de sus alturas un máximo?.

58. Determine todos los enteros que cumplen la condición $2^n + 1$ es divisible por 3.

59. Considere un triángulo de lados a, b, c. Sea $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Construya un triángulo de lados S-a, S-b y S-c. Este proceso se repite hasta que no puede construirse un triángulo con las longitudes dadas. ¿Para qué triángulo original puede este proceso repetirse indefinidamente?.

60. La sucesión de Fibonacci $a_1, a_2, a_3, ...$ se define como sigue:
$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$. Probar que 9 divide a una infinidad de términos de la sucesión de Fibonacci.

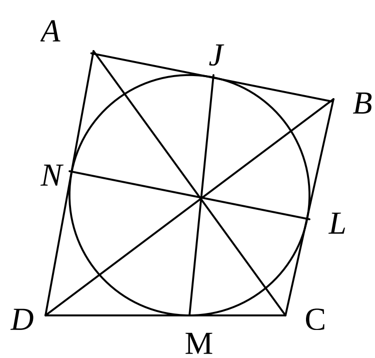
61. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 las longitudes de los lados de un pentágono convexo y m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 las longitudes de sus diagonales. Demostrar que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} \leq 1$$

62. Sea a_n el dígito de las unidades de $1997 + 1997^3 + 1997^5 + ...1997^{2n-1}$. Calcular la suma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1997}$$

63. Sean A,B,C,D los vértices de un cuadrilátero convexo y J,L,M,M los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero. Demostrar que las diagonales AC y BD del cuadrilátero y las cuerdas JM y LN son concurrentes.



64. Todos los números del 19 al 80 son escritos uno después del otro para formar el número 19202122.....7980. ¿Es este número divisible entre 1980 ?

65. Sobre una mesa hay una semiesfera de radio 1 apoyada sobre su base, y 6 esferas iguales de radio R, cada una tangente a la semiesfera, a la mesa, y a otras dos esferas. Encuentra el valor de R.

66. Demuestra que el número $n^4 + 4$ es compuesto, para toda $n > 1$.

67. El número 123456789101112..... se forma escribiendo sucesivamente los números naturales. ¿Qué dígito ocupa el lugar 1997 en dicho número ?

68. Sean ζ_1, ζ_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2 tangentes exteriormente en A, e interiormente a una tercera circunferencia con centro en O en los puntos A_1 y A_2 respectivamente. Demuestra que las líneas OA, O_1A_2 y O_2A_1 concurren.

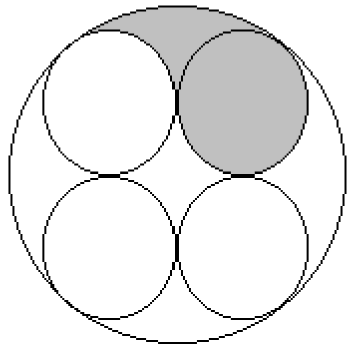
69. Sea M un conjunto de 1990 enteros positivos distintos, tales que ninguno de ellos tiene un divisor primo mayor a 26. Demuestra que M contiene al menos 2 elementos distintos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

70. ¿Cuántos números enteros cumplen las propiedades siguientes?

(i) Tienen exactamente cuatro cifras;
(ii) Las cuatro cifras son impares;
(iii) Al dividirlos por 5, el resultado es otro número entero que también tiene exactamente cuatro cifras que son impares.
(Por ejemplo, 1997 no es un número tal, ya que no cumple la tercera propiedad)

71. Considera una cuadrícula de 300 x 200. ¿A cuántos cuadros de 1 x 1 corta la diagonal de esta cuadrícula?

72. En la figura se muestran cuatro círculos de radio 1 dentro de un círculo más grande. ¿Cuál es el área de la figura sombreada?



73. Una fábrica tiene un material radioactivo en forma de un cubo de arista 2. Para evitar la radiación se forra con 26 cubos de plomo de arista 2. Al año siguiente se debe agregar otra capa de recubrimiento de plomo que consta de 56 cubos de arista 3. El tercer año el forro exterior se forma con la cantidad necesaria de cubos de arista 4. Este proceso de forrado se sigue realizando cada año (nótese que cada año, la arista de los cubos con los que se hace el forrado, crece en uno). ¿Cuántos cubos de plomo se habrán utilizado después de 1997 años?

74. Sean a, b, c números reales tales que:

$$a \geq b \geq c > 0 \qquad \text{y} \qquad a + b + c \leq 1$$

Demostrar que: $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$

75. Demostrar que si $a, b \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

76. Demostrar que si $a, b, c \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$

77. ¿Cuántas cifras tiene el número $(\underbrace{999...9}_{n\ cifras})^2 - 1$?

78. Probar que todo número impar puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados.

79. En un paralelogramo *ABCD*, si *P* es el punto de intersección de sus diagonales, demuestre que cualquier recta que pasa por *P*, divide al paralelogramo en dos figuras equivalentes:
Observación: Dos figuras equivalentes son las que tienen misma área.

80. Dados los paralelogramos *ABCD* y *DEFG*, donde:

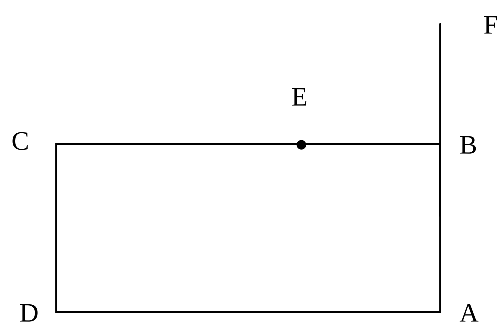
a) El vértice *D* es común, el vértice E está sobre el lado *AB*, y
b) El vértice *C* esta sobre el lado *FG*.
Demuestra que ambos paralelogramos son equivalentes (misma área).

81. Si se escriben los números naturales de forma consecutiva, obtenemos la siguiente secuencia de cifras:

$$12345678910111213141516 17...$$

¿Qué cifra ocupa el lugar 19888891 y a qué número corresponde?

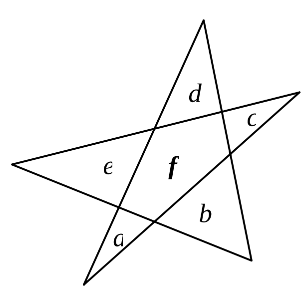
82. Dado el rectángulo *ABCD* de la figura, encontrar la posición del punto *E* sobre el segmento *BC* y la posición del punto *F* sobre la prolongación del segmento *AB*, de tal manera que $CE = AF$ y $CE \cdot AF = AD \cdot DC$



83. Hallar el número natural *n* que es el producto de los primos *p*, *q*, *r*; sabiendo que:

$$r - q = 2p \quad \text{y} \quad rq + p^2 = 676$$

84. En la figura, *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* son las áreas de las regiones correspondientes. Si todos ellos son enteros positivos diferentes entre sí y menores que 10, cada triángulo formado por tres regiones tiene área par y el área de la estrella completa es 31. Encuentre el valor de *f*.



85. En cierta novela de ciencia ficción se describen personajes que, si bien son inmortales, su forma y color varía día con día. Dichos personajes son de tres colores: rojo, azul y verde. De ellos algunos son de forma esférica y otros de forma piramidal. Día con día el 80% de los rojos se convierte en azul; el 80% de los azules se vuelven verdes y el 80% de los verdes en rojos. También ellos mismos varían de forma diariamente: el 40% de los esféricos pasan a ser piramidales y, a su vez, el 40% de los piramidales se convierten en esféricos. Supóngase que en cierto día la distribución de población es como se muestra en la tabla siguiente:

	Rojos	**Azules**	**Verdes**
Esféricos	6000	5000	3000
Piramidales	9000	10000	4000

¿ Cuántos personajes azules esféricos habrá al siguiente día ? (Cabe aclarar que todas las mutaciones ocurren en forma homogénea; es decir, por ejemplo, el 80% de los rojos esféricos cambiará su color cada día y lo mismo ocurrirá con el 80% de los rojos piramidales).

86. Pruebe que $2^{2001} + 3^{2001}$ es múltiplo de 7.

87. Se tienen cuatro canicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras tres. ¿ Cuál es el radio de la esfera más pequeña que contiene a las canicas ?.

88. ¿Cuál es el factor primo de dos dígitos más grande del entero C_{100}^{200} ?

89. Probar que para cualquier entero positivo n, existe un entero positivo k tal que

$$S(n,k) = n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+k-1)$$

es un cuadrado perfecto.

90. Sea ABC un triángulo cualquiera. D y F son puntos sobre AB tales que AD = DB , DF = FB y E y G son puntos sobre AC tales que AE = EC y EG = GC. Encuentre la razón de las áreas de los trapecios EDFG y EDBC.

91. Sea x un número real. Demuestre que:
$x \in Q \iff \{x,\ x+1,\ x+2, \ldots\}$ contiene al menos tres términos en progresión geométrica.

92. Si los números enteros *a*, *b*, *c*, *d* están en progresión aritmética, en ese orden, demuestre que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}.$$

93. En un semicírculo de diámetro $AB = 2R$ se inscribe un trapecio isósceles *AMNB*. Determine el punto *M* de manera que $MN = 2AM$.

94. Calcular la suma de los 100 quebrados que se obtienen formando todos los cocientes de cada par de números de la lista:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 y 512.

(Nota: También deben tomarse los quebrados en que el numerador y el denominador son iguales).

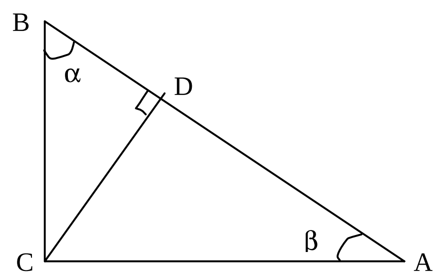
95. Sea *ABC* un triángulo y sean *Q* en *BA*, *R* en *CB* de tal forma que:
$BQ = CR = AC$.
Sea *L* una línea paralela a *AC* y que pasa por *R* y denotemos por *T* a la intersección de ésta con *CQ*.
Sea *L'* una línea paralela a *BC* que pase por *T* y denotemos por *S* a la intersección de *L'* con *AC*.
Pruebe que $AC^3 = (AQ)(BC)(CS)$.

96. ¿ Para cuántos enteros *n*, del 1 al 93, n^{20} termina en 1 ?. (Es decir, el dígito de las unidades es uno).

97. Sea un polígono convexo de 15 lados. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden formar con los vértices del polígono de tal manera que sus lados no sean lados del polígono?.

98. Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.
Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

99. En la figura, determinar los ángulos α y β suponiendo que el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo *BCA*.



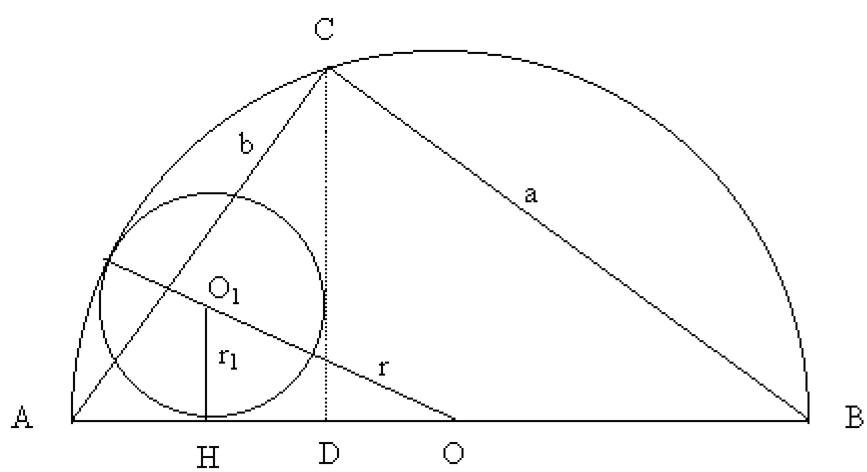
100. Considera la sucesión de números $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ definida por:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{a_1+1}, \; a_3 = \frac{1}{a_2+1}, \ldots$$

Calcula el producto $(a_1)(a_2)(a_3)\ldots(a_{15})$.

Soluciones

1.



Sean r_1 y r radios de K_1 y K respectivamente, como $r_1 = HD$, por el Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$(r - r_1)^2 = (r_1)^2 + (r_1 + DO)^2$$

$$r^2 - 2rr_1 + (r_1)^2 = (r_1)^2 + (r_1)^2 + 2(r_1)(DO) + (DO)^2$$

$$r^2 - (DO)^2 = (r_1)^2 + 2rr_1 + 2(r_1)(DO)$$

$$(r - DO)(r + DO) = 2r_1(\mathrm{r} + DO) + (r_1)^2$$

ahora bien, $r + DO = BD$ y $r - DO = \mathrm{A}D$ entonces:

$$(BD)(\mathrm{A}D) = (r_1)^2 + 2r_1(BD) \text{ - - - - - - - - - - - - - - - - - } (1)$$

por otro lado, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$ y $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$ por semejanza de triángulos,

por lo tanto: $AD = \dfrac{(AC)^2}{AB} = \dfrac{b^2}{c}$ y $BD = \dfrac{(BC)^2}{AB} = \dfrac{a^2}{c}$ entonces

$\dfrac{a^2b^2}{c} = (r_1)^2 + 2r_1\left(\dfrac{a^2}{c}\right)$, ahora bien, si completamos el trinomio cuadrado perfecto, tenemos:

$\dfrac{a^2b^2}{c} + \left(\dfrac{a^2}{c}\right)^2 = (r_1)^2 + 2r_1\left(\dfrac{a^2}{c}\right) + \left(\dfrac{a^2}{c}\right)^2$ y simplificando tenemos:

$\dfrac{a^2\left(b^2 + a^2\right)}{c^2} = \left(r_1 + \dfrac{a^2}{c}\right)^2$ y como $a^2 + b^2 = c^2$ entonces:

$a^2 = \left(r_1 + \dfrac{a^2}{c}\right)^2 \Rightarrow r_1 = a - \dfrac{a^2}{c} = BC - \dfrac{(BC)^2}{AB} = BC - BD$

como $r_1 = HD \Rightarrow BC = r_1 + BD = HD + BD = BH \therefore BC = a = BH$

$\Rightarrow$ el triángulo BCH es isósceles.

2. Debemos probar que existe un entero positivo n tal que:

$$21n \equiv 241 (\mathrm{mod}\ _{1000})$$

como 21 y 1000 son primos relativos, existen enteros s y t tales que:

$$21\mathrm{s} + 1000t = 1$$

Multiplicando ambos lados por 241 y arreglando los términos tenemos:

$$21(241s) - 241 = -241(1000t)$$

Ahora bien, en notación de congruencia, la última ecuación nos indica:

$$21(241s) \equiv 241(\text{mod }_{1000})$$

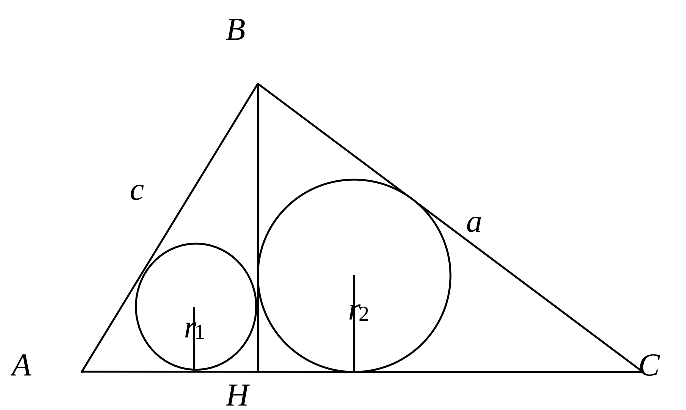
Si s es positiva, terminamos. Basta tomar $n = 241s$.

Si s no es positiva, entonces tomamos $n = 241s + 1000k$, donde k se puede elegir lo suficientemente grande para que n sea positivo. Por lo tanto;

$$21n \equiv 21(241s + 1000k) \equiv 21(241s) \equiv 241(\text{mod }_{1000})$$

Ahora, si tomamos k de manera apropiada tenemos que $n = 821$ y existen una infinidad de números que terminados en 821 dejarán en sus últimos tres dígitos al 241 al multiplicarse por 21.

3. Los triángulos rectángulos *ABC*, *AHB*, *BHC* son semejantes, por ejemplos los dos primeros lo son por tener en común el ángulo A.



Pero en triángulos semejantes las partes correspondientes son proporcionales luego la razón de los inradios a las hipotenusas es la misma es decir:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c}{b} \; y \; \frac{r_2}{r} = \frac{a}{b} \quad \text{luego} \quad r_1 b = rc \quad \text{y} \quad r_2 b = ra$$

por lo tanto $\left(r_1^2 + r_2^2\right)b^2 = r^2\left(a^2 + c^2\right)$, pero $a^2 + c^2 = b^2$ ya que el triángulo *ABC* es rectángulo, luego $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, que es una forma de relacionar los inradios.

4. Para obtener el coeficiente de $x^2y^5z^{10}$ de la expansión de $(x + y + z)^{17}$ es necesario que analicemos de la siguiente manera:

   $[(x+y)+z]^{17}$ en su desarrollo genera para z^{10} el siguiente desarrollo:

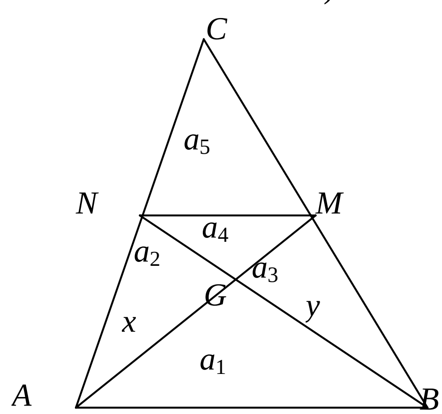
   $\binom{17}{10}(x+y)^7 z^{10}$ en el cual al desarrollar $(x + y)^7$ se puede obtener el coeficiente de x^2y^5 (el cual es $\binom{7}{5}$), teniéndose entonces que el coeficiente de $x^2y^5z^{10}$ es:

   $\binom{17}{10} * \binom{7}{5} = 408{,}408.$

5. Sean a_1, a_2, ..., a_5 las áreas de los triángulos formados como en la figura (G es la intersección de las medianas, M y N son los puntos medios de BC y AC respectivamente). Sea x la longitud de AG, sea y la longitud de BG. Entonces

   $GM = \frac{1}{2}x$ y $GN = \frac{1}{2}y$. Así, $a_1 = \frac{xy}{2}$, $a_2 = \frac{xy}{4}$, $a_3 = \frac{xy}{4}$, $a_4 = \frac{xy}{8}$ y $a_5 = \frac{xy}{4}$.

   (Esto último pues el triángulo CNM es semejante al triángulo CBA, y sus dimensiones lineales están en razón 1:2).



   Pero $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 18$, por lo tanto $\frac{9}{2}xy + \frac{9}{2} = 18$, es decir, $xy = 12$. Por otro lado, por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $x^2 + y^2 = 25$. Así $x^2y^2 = 144$ y entonces como $x^2 = 25 - y^2$, de donde $(25 - y^2)y^2 = 144$, entonces:

   $$y^4 - 25y^2 + 144 = 0$$

   por lo tanto, $y^2 = 16$ ó 9, entonces y = 3 y y = 4 (o al revés). Entonces, por Pitágoras: $AC = \sqrt{73}$ y $BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

6. Designemos la suma buscada por S_n. Transformemos los sumandos de esta suma empleando la fórmula para la suma de los términos de una progresión geométrica:

$$1+10=\frac{10^2-1}{9}$$

$$1+10+100=\frac{10^3-1}{9}$$

$$1+10+100+1000=\frac{10^4-1}{9}$$

*   *   *   *

$$1+10+100+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}$$

puesto que además $1=\dfrac{10-1}{9}$, sumando los segundos miembros de las igualdades, tendremos:

$$S_n=\frac{1}{9}\left(10+10^2+10^n-n\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n-1}-10}{9}-n\right)$$

7. A continuación se presenta el desarrollo de la solución al problema de Geometría Euclideana.

1)	$AC=AB$	por hipótesis 1
2)	$<ACB=<ABC$	por ser ángulos opuestos a lados iguales en ΔABC
3)	ΔABC es isósceles	por tener dos lados y dos ángulos iguales
4)	$<\alpha=<\beta$	por hipótesis 2
5)	$PC=PB$	por ser lados opuestos a ángulos iguales en ΔPCB
6)	$<MCP=<NBP$	porque $\alpha + <MCP = \beta + <NBP$
7)	$<MPC=<NPB$	por ser ángulos opuestos por el vértice
8)	$\Delta MPC\cong\Delta NPB$	Teorema (A,L,A) pasos 6), 5) y 7)

9) $MP = PN$ por ser lados opuestos a ángulos iguales en triángulos congruentes.

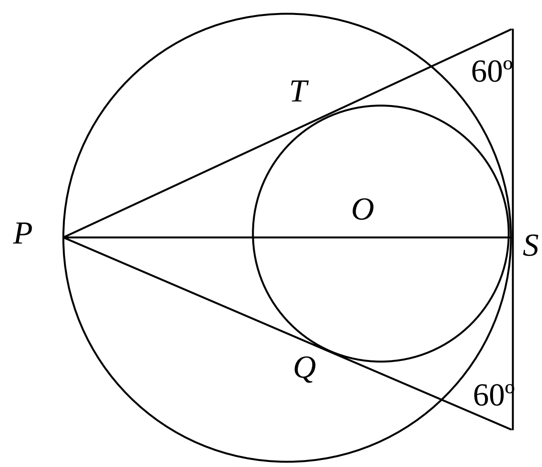
10) $MC = NB$ por ser lados opuestos a ángulos iguales en triángulos congruentes

11) $AC = CM - MA$ suma de segmentos

12) $AB = BN - NA$ suma de segmentos

13) $AC = AB \Rightarrow CM + MA = BN + NA \therefore AM = AN$

8. El círculo pequeño está inscrito en un triángulo equilátero. La mediana *PS*, es bisectriz del ángulo y mide *2R*. El punto de intersección de las medianas en cualquier triángulo se encuentra a una tercera parte de la base.



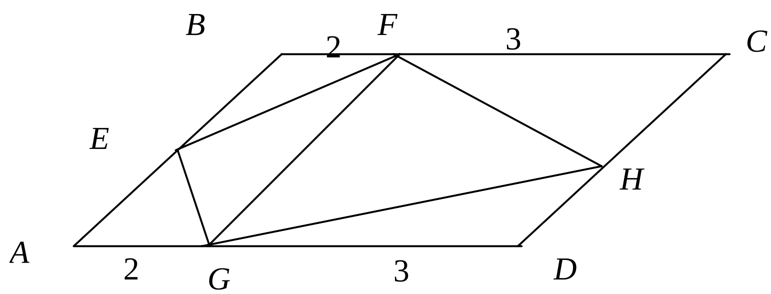
Así $\frac{OS}{PS} = \frac{1}{3}$, es decir, $\frac{r}{2R} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto $r = \frac{2R}{3}$ y el área del círculo pequeño es

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{2R}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}\left(\pi R^2\right),$$ es decir, $\frac{4}{9}$ del área del círculo mayor

9. Utilizando la fórmula para sumar los términos de una progresión aritmética se tiene que: $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{1}{2} n(2n) = n^2$$

Lo anterior da una prueba directa. El lector puede intentar otra prueba utilizando directamente el principio de inducción matemática.

10. Si un triángulo tiene la misma base que un paralelogramo y su tercer vértice está sobre el lado paralelo a la base, entonces el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo. El triángulo *EFG* está dentro del paralelogramo *ABFG* y el triángulo *FGH* está contenido en el paralelogramo *DCFG*. Por lo tanto el área del cuadrilátero *FEGH* que es igual al área del triángulo *EFG* más el área del triángulo HFG será la mitad del área del paralelogramo *ABCD*. Por lo tanto el área que buscamos es de $5m^{2.}$



11. Sea n un entero positivo. Según el algoritmo de Euclides, existen enteros p y k $(0 \leq k < 3)$ tales que $n = 3p + k$. Ahora si consideramos a los números n, $(n+1)$ y $(n+2)$ se tienen tres casos a considerar

$$n = 3p + k, \qquad n + 1 = 3p + k + 1 \qquad \text{y} \quad n + 2 = 3p + k + 2$$

Si $k = 0$, n es divisible por 3. Si $k = 1$, $n + 2 = 3p + 3 = 3(p + 1)$ es divisible por 3. Si $k = 2$, $n + 1 = 3p + 3 = 3(p+1)$ es divisible por 3.

12. Utilizando la fórmula para sumar los n primero términos de una progresión aritmética se tiene que:

$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6\ldots+(2n)} = \frac{\frac{1}{2}n(2n)}{\frac{1}{2}n(2n+2)}$$

$$= \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{1996}{1997}$$

Esta última ecuación tiene como única solución $n = 1996$.

13.

$$2 + 5 + 8 + ... + x = 155$$
$$2 + (2 + 3) + (2 + 2(3)) + (2 + 3(3)) + ... + (2 + n(3)) = 155$$

$$2(n + 1) + 3(1 + 2 + .. + n) = 155$$

$$2(n + 1) + 3n(n+1)/2 = 155$$

$$4n + 4 + 3n^2 + 3n = 310$$

$$3n^2 + 7n - 306 = 0$$

La solución positiva es $n = 9$ lo que nos da $x = 2 + 3n = 29$.

14. Observe que dadas las condiciones del problema el triángulo tiene un ángulo obtuso. Llamemos a, b y c a los lados del triángulo, A el ángulo obtuso y S la superficie. Se tiene que

$$\begin{aligned} a^2 &= 505 \\ b^2 &= 233 \\ c^2 &= 52 \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2\ 2bc \cos A$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2bc \cos A &= 220 \\ b^2c^2 = b^2c^2 \cos^2 A &+ b^2c^2 sen^2 A \\ S = \frac{bc\,senA}{2} &= 2 \text{ hectáreas} \end{aligned}$$

15. Sea la progresión a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + 99d$, entonces tenemos que hallar

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 +...+ (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad(1 + 2 +... + 99) +$ $d^2 (1^2 + 2^2 +... + 99^2)$

Para calcular a y d resolvemos el sistema: $\begin{cases} (a + a + 99d)50 = -1 \\ (a + d + a + 99d)25 = 1 \end{cases}$ que operado y resuelto sale:

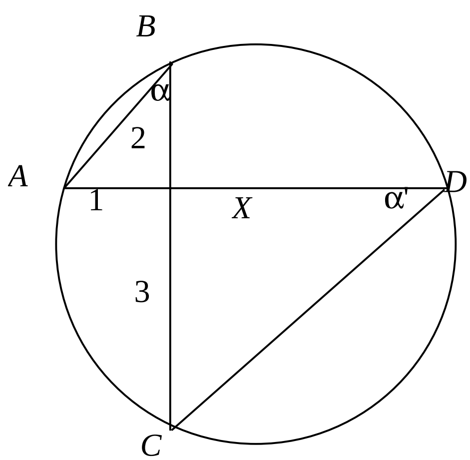
$a = -2.98$; $d = 0.06$.

El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1 + 2 + ... + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + ... + 99^2 = 328350.$$

El resultado final es S = 29998

16. Dibuja un círculo en el plano. Sea I la intersección de las barras de metal. AI, BI y CI son las longitudes de 6, 8 y 15 cm. respectivamente. Estas longitudes marcan los puntos donde la cazuela se termina. Sea AD el diámetro de la cazuela.



$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$
$$AC = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

Como el ángulo $\angle ABD$ está formado con el diámetro y B está en el círculo, éste es un ángulo recto. El $\angle\alpha = \angle\alpha'$, ya que ambos abren el mismo arco AB. Finalmente el ángulo $\angle AIC$ es un ángulo recto. Por lo tanto el triángulo ΔABD es semejante al triángulo ΔAIC. Es decir

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AI}$$

Por lo tanto

$$AD = \frac{(10)(17)}{8} = 21.25$$

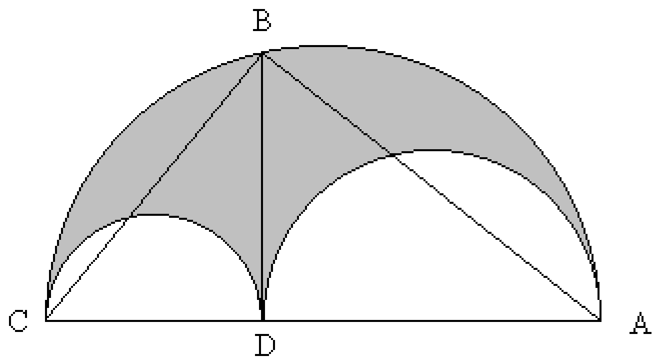
Veamos a qué distancia del centro intersecta la cazuela a la cuarta barra de metal. Construyamos los triángulos ΔABI y ΔILC como se muestra en la figura (15). Como los dos abren el mismo arco AC, $\angle\beta = \angle\beta'$. Por lo tanto, el triángulo rectángulo ΔABI es semejante al triángulo rectángulo ΔILC.
De donde,

$$\frac{x}{CI} = \frac{BI}{AI}$$

$$x = \frac{2x3}{1}$$

$$= 6$$

17.



Denotemos por A_c el área del cuchillo del zapatero. Entonces

$$A_c = \frac{\pi}{8}CA^2 - \frac{\pi}{8}CD^2 - \frac{\pi}{8}DA^2$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(CA^2 - CD^2 - DA^2\right)$$

Como $CA = CD + DA$ tenemos que (como se ve en la figura)

$$A_c = \frac{\pi}{8}\left((CD+DA)^2 - CD^2 - DA^2\right) = \frac{\pi}{4}CD \cdot DA$$

El área del círculo de diámetro BD es

$$A_{BD} = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}BD^2$$

Pero sabemos que el ángulo $\angle CBA$ es recto, por estar inscrito en un semicírculo. Además $\Delta CBD \sim \Delta BAD$. Luego

$$\frac{CD}{BD} = \frac{BD}{DA}$$

$$BD^2 = CD \cdot DA$$

Entonces el área del círculo de diámetro BD es

$$A_{BD} = \frac{\pi}{4} CD \cdot DA = A_c$$

18. Pongamos que los tres números consecutivos sean n, $(n + 1)$ y $(n + 2)$. Se tiene que

$$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

$$= 9(n^2 + 1) + 3n(n^2 + 5)$$

Según la igualdad anterior el problema se reduce a demostrar que para cualquier entero positivo n, $n(n^2 + 5)$ es divisible por tres. Podemos ahora considerar tres casos $n = 3k$, $n = 3k + 1$ y $n = 3k + 2$. En el primer caso es claro que el número es divisible por 3. En el segundo, se tiene que

$$(3k + 1)^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 6 = 3(k^2 + 2k + 2).$$

Y en el último caso

$$(3k + 2)^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 9 = 3(3k^2 + 4k + 3).$$

19. Se trata de analizar la ecuación

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = p^2,$$

donde n y p son enteros positivos. Esta igualdad se puede escribir en la forma

$$4n + 6 = 2(2n + 3) = p^2 ,$$

lo cual dice que p es un número par. Pongamos $p = 2q$. Ahora se tiene que

$$2(2n + 3) = 4q^2$$

ó

$$2n + 3 = 2q^2.$$

Esta ecuación no tiene soluciones enteras positivos pues el miembro izquierdo es un número impar y el miembro derecho es par.

20. Se trata de analizar la ecuación

$$n(n + 1)(n + 2) = p^3.$$

Es claro que $p \neq n$, $p \neq n + 1$ y $p \neq n + 2$, pues, de lo contrario, en cada caso tendríamos:

- $p(p+1)(p+2) > p^3$
- $(p - 1)(p)(p + 1) = p(p^2 - 1) = p^3 – p < p^3$
- $(p – 2)(p - 1)(p) < p^3$

Al ser p, diferente de los tres números, sólo le quedan las siguientes posibilidades:
$p < n$ ó $p > n + 2$, siendo ambas imposibles pues:

$p < n \Rightarrow n(n + 1)(n + 2) > p^3$, y

$p > n + 2 \Rightarrow n(n + 1)(n + 2) < p^3$

21. Nótese que $(5a+1)(3a+2) = 15a^2 + 13a + 2$

Luego del problema se reduce a buscar los enteros positivos a tales que $13a + 2$ sea divisible por 3 y por 5. Escribamos

$$13a + 2 = 10a + (3a + 2) \quad y \quad 13a + 2 = 12a + (a + 2).$$

Ahora se necesita que $(3a+2)$ sea divisible por 5 y $(a+2)$ sea divisible por 3. La segunda relación dice que a debe ser de la forma $3k + 1$ (con k = 0,1,......) Regresemos a la primera relación:

$$3(3k+1) + 2 = 9k + 5$$

Luego, k debe ser un múltiplo de 5. De aquí que la solución viene dada por todos los números de la forma $15s + 1$ con $s = 0,1,2,....$

22. Los segmentos OC y OD son congruentes, ya que ambos son radios. Entonces el triángulo ΔDOC es isósceles rectángulo, por lo tanto

$$\angle CDO = \angle OCD$$

$$\text{y } \angle CDO = 45°$$

El triángulo ΔCAP es isósceles ya que el lado CA y CP son congruentes.

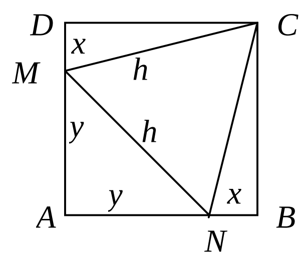
Por lo tanto $<BCA = 60°$

23. Como $n^2 + 2n = n(n+2)$, si algún divisor del denominador divide a $(n^2 + n - 1)$, este debe ser un divisor de $(n + 2)$. Luego el problema es el de determinar cuando $n^2 + n - 1$ y $(n + 2)$ tienen divisores comunes.

Como $n^2 + n - 1 = n(n+2) - (n+1)$, estaríamos buscando divisores comunes de $(n + 1)$ y $(n + 2)$, pero dos números consecutivos no tienen divisores comunes distintos de 1.

24. De la figura, vemos que $x + y = 1$. Por Pitágoras tenemos

$$2y^2 = h^2$$
$$x^2 + 1 = h^2$$



Igualando ambas ecuaciones y usando el hecho de que $y = 1 - x$ tenemos que

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

De donde obtenemos que $x = 2 \pm \sqrt{3}$.. De éstas dos soluciones la única válida en nuestro problema es que $x = 2 - \sqrt{3}$. Ahora bien el área del triángulo ΔCMN es

$$A_{\Delta CMN} = 1 - 2A_{\Delta CBN} - A_{\Delta AMN}$$

Pero las áreas de los triángulos son

$$A_{\Delta CBN} = \frac{x}{2}$$

$$A_{\Delta AMN} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

Sustituyendo obtenemos que el área del ΔCMN es

$$A_{\Delta CMN} = 2\sqrt{3} - 1$$

25. Si trazamos el triángulo equilátero cuyos vértices están en los centros de cada círculo, tenemos que la parte de cada círculo dentro del triángulo es una sexta parte de su superficie.

    Llamemos *b* a la base del triángulo y h su altura, entonces

$$b = 2r$$

    Y usando el teorema de Pitágoras

$$h = r\sqrt{3}$$

    Por lo tanto el área del $\Delta ABC\ es\ r^2\sqrt{3}$

    Como el área del círculo es πr^2, tenemos que el área ocupada por los círculos dentro del triángulo es

$$3\left(\frac{\pi r^2}{6}\right) = \frac{\pi r^2}{2}$$

    Por lo tanto el área de la región sombreada es $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$

26. $\frac{n(n+1)}{2}$

27. A = B

28. $\frac{25}{4}\pi$

29. Comenzamos el conteo analizando los números que constan únicamente de un dígito. De estos tenemos únicamente un número con el 2.

Para los números que constan de dos dígitos tenemos 9 números 2 para los números cuyo segundo dígito (contando de derecha a izquierda) es cualquier número del 1 al 9 y 10 números donde el segundo dígito es 2. Por lo tanto, para los números que constan de dos dígitos tenemos un total de 19 números 2. De donde, para los números del 1 al 99 el número 2 aparece un total de 20 veces, esto lo podemos escribir como (2)(10). Por lo tanto, el número de veces que aparece el número 2 en 10 es (2)(10).

En un número de tres dígitos, como el tercer dígito no puede ser 0, tenemos 9 veces el número de números 2 que aparecen en los números de dos cifras más 100 números 2 de los números cuyo tercer dígito es un 2. Es decir, que tenemos 9 . 20 + 10^2. Si a esto le sumamos los 20 números 2 que teníamos en los números de dos dígitos, tenemos un total de:

$$9 \cdot 20 + 10^2 + 20 = 20 \cdot 10 + 10^2 = 2 \cdot 10 + 10^2 = 3 \cdot 10^2$$

Por lo tanto, el número de veces que aparece el número 2 en 10^3 es $3 \cdot 10^2$.

Siguiendo el mismo razonamiento, en un número de cuatro cifras tenemos 3.10^2 números 2 de los números de 3 cifras más 10^2 de los números cuya cuarto dígitos es un 2, es decir,

$$3 \cdot 10^2 + 10^2 = 4 \cdot 10^3$$

Por lo tanto para el número 10^{1996} tenemos $1996 \cdot 10^{1995}$ números 2.

30.

Solución 1: Como $3n + 1$ es cuadrado perfecto, podemos escribir $3n + 1 = t^2$ para algún entero t. De aquí que, despejando y factorizando,

$$3n = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1).$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, al descomponer el producto $(t - 1)(t + 1)$ en sus factores primos, debe de aparecer el 3, así que 3 es un factor primo de

t – 1 ó de t + 1. De cualquier manera podemos escribir t – 1 = 3q o t + 1 = 3q donde q es un número entero. Si despejamos t obtenemos en los dos casos

$$t = 3q \pm 1.$$

Sustituyendo este valor de t en la igualdad $3n+1=t^2$ se tiene

$$3n+1=(3q\pm 1)^2 = 9q^2 \pm 6q+1,$$

de donde

$$3n = 9q^2 + 6q = 3(3q^2 \pm 2q).$$

Cancelando el tres obtenemos

$$n = 3q^2 \pm 2q,$$

Y al sumar 1 se obtiene finalmente

$$n+1=3q^2 \pm 2q+1=q^2+q^2+(q^2 \pm 2q+1)=q^2+q^2+(q\pm 1)^2.$$

Así, n + 1 es la suma de tres cuadrados perfectos.

Solución 2: Por hipótesis $3n+1=t^2$, para algún entero t. Por el Algoritmo de la División, al dividir t por 3 el residuo r que resulta de la división es un elemento de $\{0,1,2\}$

Caso A: r = 0 (Caso imposible)

Se tendrá t = 3m, para algún entero m. Por tanto

$$3n+1=(3m)^2=9m^2,$$

de modo que

$$3n=9m^2-1=(3m-1)(3m+1) \Rightarrow 3 \mid (3m-1)(3m+1),$$

y como 3 es primo, vemos que $3 \mid (3m-1)$ o $3 \mid (3m+1)$.. Evidentemente 3 no divide a 3m + 1 ni a 3m – 1, por lo que resulta insostenible que r = 0.

Caso B: $r = 1$ (Caso posible)

Se tendrá $t = 3m + 1$, para algún entero m. Por ende

$$3n + 1 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1,$$

y en consecuencia

$$3n = 9m^2 + 6m = 3(3m^2 + 2m) \Rightarrow n = 3m^2 + 2m.$$

Entonces

$$\begin{aligned} n + 1 &= 3m^2 + 2m + 1 \\ &= m^2 + m^2 + (m^2 + 2m + 1) \\ &= m^2 + m^2 + (m + 1)^2 \end{aligned}$$

y así $n + 1$ es la suma de tres cuadrados.

Caso C: $r = 2$ (Caso posible)

Se tendrá $t = 3m + 2$, para algún entero m. Por consiguiente

$$3n + 1 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4,$$

de donde

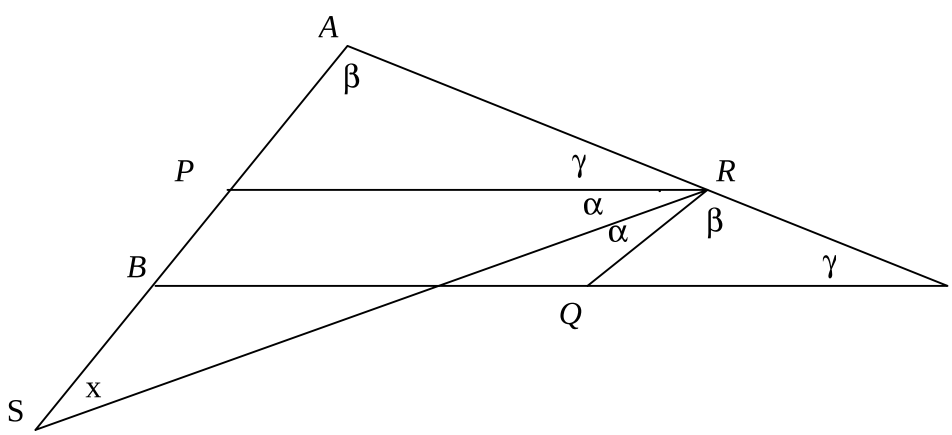
$$3n = 9m^2 + 12m + 3 = 3(3m^2 + 4m + 1) \Rightarrow n = 3m^2 + 4m + 1,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} n + 1 &= 3m^2 + 4m + 2 \\ &= m^2 + (m^2 + 2m + 1) + (m^2 + 2m + 1) \\ &= m^2 + (m + 1)^2 + (m + 1)^2 \end{aligned}$$

y así $n + 1$ es la suma de tres cuadrados.

31. Considérese la siguiente figura:.



Sean $\alpha = \angle PRS$, $\beta = \angle SAR$ *y* $\gamma = \angle ARP$. En virtud de que *RS* es bisectriz de $\angle PRQ$, tenemos $\angle SRQ = \alpha$. . Llamemos *x* al ángulo $\angle PSR$. . Puesto que *P*,*Q* y *R* son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$, la línea *AB* es paralela a *RQ* y *BC* es paralela a *PR*. Entonces, $\angle QRC = \beta$ *y* $\angle QCR = \gamma$ ya que son ángulos correspondientes entre paralelas. La suma de los ángulos interiores del triángulo *ASR* es $\mathrm{x} + \beta + \gamma + \alpha = 180°$. La suma de los ángulos alrededor de *R* es 180° pues forman un ángulo llano, de modo que $\gamma + \alpha + \alpha + \beta = 180°$. Así pues, igualando ambas ecuaciones tenemos

$$\chi + \beta + \gamma + \alpha = \gamma + \alpha + \alpha + \beta,$$

De donde $x = \alpha$ Se sigue que en el triángulo *PRS* los ángulos sobre la base *RS* son iguales, y por lo tanto el triángulo es isósceles.

32. Sean $a_1 = n$, $a_2 = n+1$, $a_3 = n+2$ *y* $a_4 = n+3$. Multiplicando estos números y sumando 1 tenemos

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$$

$$= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Luego, factorizando,

$$a_a a_2 a_3 a_4 + 1 = \left(n^2 + 3n + 1\right)\left(n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= \left(n^2 + 3n + 1\right)^2$$

de donde se obtiene que $a_1 a_2 a_3 a_4 + 1$ es un cuadrado perfecto.

33.

Común a Soluciones 1 y 2: Como $n+1$ es un cuadrado perfecto, $n+1=t^2$ para algún entero t. Además, como p es divisor de n, existe un entero q tal que $n = qp.$ Por tanto, $t^2 - 1 = qp,$ es decir,

$$(t-1)(t+1) = qp,$$

así que p divide al producto (*t* – 1) (*t* + 1). Pero *p* es un primo, y en consecuencia *p* divide a *t*-1 ó *p* divide a *t*+1. En cualquier caso, *k* tiene la forma $t = hp \pm 1$ para algún entero *h*.

Solución 1: En consecuencia,

$$n + 1 = (hp \pm 1)^2 = h^2 p^2 \pm 2hp + 1$$

Es decir, $n = h^2 p^2 \pm 2hp,$ o equivalente

$$p^2 (\pm h)^2 + 2p(\pm h) - n = 0.$$

La igualdad anterior muestra que el entero *h* (y también el entero -*h*) es solución a la ecuación cuadrática $p^2 x \;\; + 2px - n = 0.$

Solución 2: Resolviendo la ecuación cuadrática dada mediante la fórmula general se encuentra

$$x = \frac{-2p \pm \sqrt{(2p)^2 + 4p^2 n}}{2p^2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2(n+1)}}{2p^2}$$

En donde $n + 1 = t^2,$ de manera que

$$x=\frac{-2p\pm\sqrt{4p^2t^2}}{2p^2}=\frac{-2p\pm 2pt}{2p^2}=\frac{2p(\pm t-1)}{2p^2}=\frac{\pm t-1}{p}.$$

En consecuencia las raíces son

$$x_1=\frac{t-1}{p}$$

y

$$x_2=-\frac{t+1}{p};$$

Pero se demostró arriba que p divide a t-1 ó a t+1. Si p divide a t-1, la raíz x_1 es un entero. Si p divide a t+1, la raíz x_2 es un entero.

34. Tenemos que determinar en que “bloque” cae el término número 2000.

El término número 1 cae en el último número del bloque de los 1’s

El término número 3 cae en el último número del bloque de los 2’s

El término número 6 cae en el último número del bloque de los 3’s.

Así en general, el término número n cae en el último número del bloque de los m’s si se cumple que: 1 + 2 + 3 + ... + m = n.

Como sabemos que:

$$1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

entonces, solo tenemos que encontrar el número m que cumpla que:

$$S_m=\frac{m(m+1)}{2}\geq 2000 \quad y \quad S_{m-1}<2000$$

si $m=63$, $S_m=2016$ y $S_{m-1}=S_{62}=1953$. Por lo tanto, el número buscado es 63, o sea, el término número 2000 cae en el bloque de los 63’s.

35. Basta con racionalizar el denominador y obtendremos la siguiente suma:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\right)\left(\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}\right)=$$

$$\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}\right)+\ldots+\left(\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}\right)=\left(\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1}\right)+\ldots+\left(\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

Puede observarse que las raíces se eliminan por parejas, excepto $\sqrt{1}$ y $\sqrt{100}$, de esta manera, obtenemos la operación

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9$$

36. El diámetro del círculo es igual a un lado del cuadrado *EFGH*.

Despejando la fórmula del área del círculo: $A=\frac{\pi d^2}{4}$

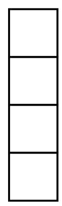
Obtenemos: $d=\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

Que es igual al lado del cuadrado *EFGH*. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la diagonal del cuadrado *EFGH* = lado del cuadrado *ABCD*.

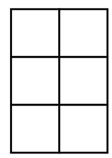
$$\overline{FH}=\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{4A}{\pi}\right)+\left(\frac{4A}{\pi}\right)}=\sqrt{\frac{8A}{\pi}}$$

Área del cuadrado *ABCD* = $\left(\overline{BC}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{8A}{\pi}}\right)^2=\frac{8A}{\pi}$

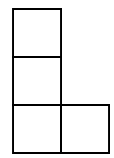
37. El problema equivale a contar cuántas figuras de perímetro 10 se pueden formar con cuadritos de 1 x 1, y después multiplicar el número de figuras por 10 (que es el número de posiciones relativas en la figura de perímetro 10, en las que la casa de Ana puede quedar como vértice) y también por 2 (para tomar en cuenta los dos sentidos en que se puede hacer el recorrido). Las figuras mencionadas de los siguientes tipos:



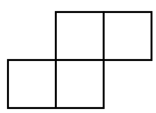
tipo uno



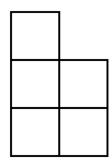
tipo dos



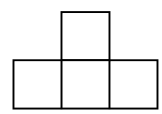
tipo tres



tipo cuatro



tipo cinco



tipo seis

Contemos ahora cuántas posiciones tiene cada uno de estos tipos. Del tipo uno hay 2 posiciones: vertical (como muestra el dibujo) y horizontal. Análogamente del tipo dos hay 2, del tres hay 8, del cuatro hay 4, del cinco hay 8 y del seis hay 4.

La respuesta entonces es 20(2 + 2 + 8 + 4 + 8 + 4) = 560.

38. Cada uno de los arcos que forman el lado de uno de los pétalos corresponde a un arco de 60° (La demostración, bastante sencilla, se deja al lector), es decir, cada uno de esos segmentos de arco tiene una longitud de:

$$\frac{1}{6}(\pi \cdot d) = \frac{1}{6}(\pi \cdot 4cm) = \frac{2\pi}{3}cm$$

Como existen 12 de esos arcos, el perímetro de la flor será igual a:

$$12\left(\frac{2\pi}{3}\ cm\right) = \frac{24\pi}{3}\ cm = 8\pi\ cm$$

39. Fijémonos que cada número de entre los 120 que podemos formar tiene su *complementario*, el cual formamos sustituyendo, en el número original, el 1 por el 5, el 2 por el 4, el 3 por sí mismo, el 4 por el 2 y el 5 por el 1.

    Así por ejemplo, el *complementario* de 12345 sería, según nuestro procedimiento el 54321; del 23154 el 43512 y así sucesivamente.

    Lo interesante es que la suma de cada número y de su *complementario* es 66 666, por lo tanto, la suma buscada sería el número de parejas del número y su *complementario* (60 parejas) por 66 666.   [60 x 66 666 = 3 999 960].

40. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a 360°, por lo que el área sin sombrear de los 4 vértices será igual al área de una circunferencia de radio 1. De esta manera, se tiene que el área sombreada es igual a $5-\pi$.

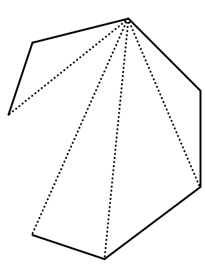
41. Se tiene:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

    Sea d = *m.c.d* (a, b). Como ab es divisible por d^2, entonces $a^2 + b^2 + ab$ es divisible por d^2 y también lo son $a^2 + b^2$ y $a + b$, y al ser a y b naturales, se tiene:

$$a+b \geq d^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} \geq d$$

42. (a)



Un polígono de n lados tiene n vértices. Observemos que en uno de ellos tenemos, por cada vértice que no sea adyacente, una diagonal; es decir, tenemos n – 3 diagonales y esto es para cada punto, así que el número total de diagonales de n(n – 3) pero cada diagonal la estamos contando con respecto al punto inicial y al final, es decir 2 veces, así que el número de diagonales es:

$$\underline{\mathrm{n}(\mathrm{n}-3)}$$

    (b) Se tiene:

$$\begin{array}{rcr} 4 < n & \qquad\qquad & 4 < n \\ -n + 4 < 0 & & -1 < n \\ -4n + 4 < -3n & & -n < 1 \end{array}$$

$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 3n$

$(n - 2)^2 < n(n - 3)$

$-3n < -2n+1$

$n^2 -3n < n^2 -2n+1$

$n(n-3) < (n-1)^2$

(c) $\frac{n(n-3)}{2} = 119.$

$n^2 - 3n - 238 = 0$

$(n-17)(n+14) = 0$

de modo que

$n = 17$ ó $n = -14$ imposible

así que

$n = 17.$

43. Con los datos del enunciado tenemos:

En el triángulo *ABC* $\angle BAC = 36°, \angle ABC = \angle ACB = 72°$

En el triángulo *CBD* $\angle BCD = 36°, \angle CDB = \angle BDC = 72°$

En el triángulo *ADC* $\angle DAC = \angle ACD = 36°, \angle ADC = 108°$

Por tanto ΔBCD *y* ΔADC son isósceles y además ΔBCD es semejante al $\angle ABC$.

Para los lados se tiene: $DC = AD = a$; $BD = b - a$.

Expresando la proporcionalidad derivada de la semejanza anterior:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 - ab \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Y resolviendo queda $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{(\sqrt{5}-1)\,b}{2}$ es decir *a* es la sección áurea de *b*.

44. Veamos primero que p tiene infinitos múltiplos de la forma 999...9. Consideremos la sucesión: 9, 99, 999,....., 999...9 (el último tiene n nueves). Entonces se tiene:

$$9 = 10 - 1;\ \ 99 = 10^2 - 1;\ \ \ 999 = 10^3 - 1; \ldots\ldots.999..99 = 10^{\mathrm{n}} - 1$$

en la sucesión hay infinitos términos de la forma $10^m - 1$, puesto que, por el teorema de Fermat:

$$10^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mód } p) \text{ si } p \neq 2,\ p \neq 5$$

y entonces para cada natural k, se tiene

$$(10^{p-1})^k \equiv 1 \ (\text{mód } p) \text{ si } p \neq 2,\ p \neq 5$$

Finalmente 999...9 = 9(111.....1) entonces si p es primo con 9 ($p \neq 3$), p divide al producto, luego divide a 111....1.

Queda el caso p = 3 que es evidente ya que los infinitos números: 111; 111111,......son múltiplos de tres, pues la suma de sus dígitos lo es.

45. Si representamos los elementos de la primera fila por $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Los elementos de la segunda serán: $a_0 + a_1,\ a_1 + a_2,\ a_2 + a_3, \ldots.$

Los de la tercera serán: $a_0 + 2a_1 + a_2,\ a_1 + 2a_2 + a_3, \ldots.$

Para la cuarta: $a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3,\ a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4, \ldots$

Supongamos que los dos primeros elementos $b_{p,0}$ y $b_{p,1}$ de la fila p-ésima son:

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0} a_0 + \binom{p-1}{1} a_1 + \ldots. + \binom{p-1}{p-1} a_{p-1};$$
$$b_{p,1} = \binom{p-1}{0} a_1 + \binom{p-1}{1} a_2 + .. + \binom{p-1}{p-1} a_p$$

Entonces, el primer elemento de la fila siguiente será:

$$b_{p+1,\,0} = \binom{p}{0} a_0 + \binom{p}{1} a_1 + \ldots + \binom{p}{p} a_p \qquad (*)$$

En nuestro caso la primera fila tiene 1994 elementos, la segunda 1993,....y la última corresponde a p + 1 = 1994 y su único elemento será

$$b_{1994} = \binom{1993}{0} \bullet 0 + \binom{1993}{1} \bullet 1 + ... + \binom{1993}{1993} \bullet 1993$$

Al ser 1993 primo, $\binom{1993}{k}$ es múltiplo de 1993 para todo k menor que 1993 y por tanto b_{1993} es múltiplo de 1993.

46. Sea m la longitud de la hipotenusa y n la del otro cateto, se tiene entonces la siguiente ecuación:

$$n^2 + 1988 = m^2$$

de aquí se deduce que:

$$1988 = (m+n)(m-n)$$

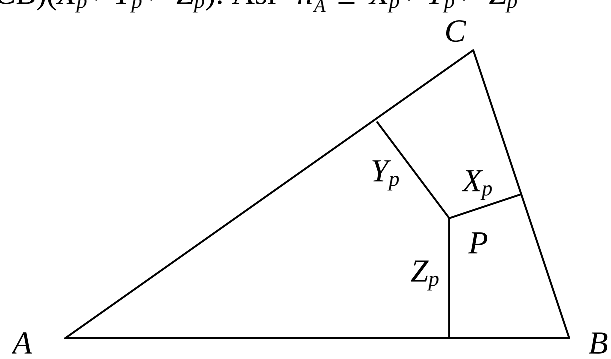
Estos dos factores tienen la misma paridad y como el producto es par, los dos tienen que ser pares y como $1998 = 4 \cdot 7 \cdot 71$, las únicas posibilidades para los factores son 2 y $2 \cdot 7 \cdot 71$. ó $2 \cdot 7$ y $2 \cdot 71$. Cada una de estas opciones genera una solución: 496 y 498 ó 64 y 78.

47. Entre los divisores de un número se encuentra siempre 1 y el número mismo; entonces, para que sólo haya otro divisor es necesario que el número sea el cuadrado de un primo, pues entonces sus divisores son 1, p y p^2. Los números del tipo p^2 menores que 100 son únicamente cuatro:

$$2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 5^2 = 25 \quad \text{y} \quad 7^2 = 49$$

El producto es $4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 49 = 44100$ y desde luego es un cuadrado perfecto por ser producto de cuadrados.

48. Supongamos que CB es el lado más pequeño del triángulo y llamemos h_A la altura por A. Como área (ABC) = área(ABP) + área (BCP) + área(ACP), tenemos que $(CB)h_A = (CB)X_p + (AB)Z_p + (AC)Y_p \geq (CB)X_p + (CB)Y_p + (CB)Z_p$, de manera que $(CB)\, h_A \geq (CB)(X_p + Y_p + Z_p)$. Así $h_A \geq X_p + Y_p + Z_p$

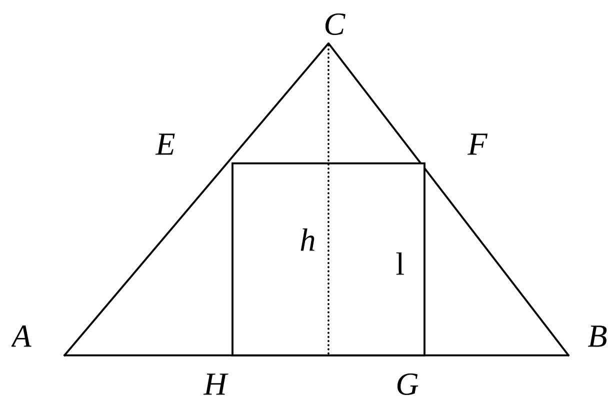


Cuando el punto que tomamos para trazar las perpendiculares es el vértice A, tenemos que $X_A = h_A, Y_A = 0 \ y \ Z_A = 0$ de manera que:

$$X_A + Y_A + Z_A = h_A + 0 + 0 \geq X_p + Y_p + Z_p$$

Por tanto en A la suma es mayor o igual que en cualquier otro punto P y en consecuencia el punto en el que se alcanza el máximo de la suma es en el vértice opuesto al lado más pequeño del triángulo.

49. Basándonos en la notación como en el dibujo tenemos:



área (ABC) =

área $(AHE) + l^2 + área(GBF) + área(EFC) = \frac{(AH)^l}{2} + l^2 + \frac{(GB)^l}{2} + \frac{(h-l)^l}{2}$.

Así $AB \cdot h = AH \cdot l + 21^2 + GB \cdot l + (h-l)^l = l(AH + l + GB) + hl = l(AB + h)$. Por tanto $l = \frac{AB \cdot h}{AB + h}$.

50. $x \equiv 0 \bmod_3 \ \Rightarrow \ x^2 \equiv 0 \bmod_3$
$x \equiv 1 \bmod_3 \ \Rightarrow \ x^2 \equiv 1 \bmod_3$
$x \equiv 2 \bmod_3 \ \Rightarrow \ x^2 \equiv 1 \bmod_3$

de donde

$x^2 + y^2 \equiv 0 \bmod_3 \ \Rightarrow \ x \equiv 0 \bmod_3$ y $y \equiv 0 \bmod_3$ y en consecuencia 3 divide tanto a x como a y.

51. Tenemos $\frac{5h}{2} \leq 26950 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11. Así, h \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$ Por otro lado *h* debe ser un divisor de 26 950, así que

$h = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 7^{\gamma} 11^{\partial}\ con\ \beta, \gamma \in \{0,1,2\}\ y\ \alpha, \delta \in \{0,1\}$. Si fijamos $\beta \in \{0,1\}$, automáticamente cualquier elección de α, γ y δ nos dará la desigualdad $h \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$ que queremos; en este caso tenemos $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ posibilidades. Si ponemos $\beta = 2$, vamos a ver qué posibilidades de α, γ y δ nos dan $2^{\alpha} \cdot 5 \cdot 7^{\gamma} \cdot 11^{\delta} \leq 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11.$ Si $\delta = 0$ entonces α y γ pueden tomar cualquier valor: $\alpha = 0,1$ y $\gamma = 0,1,2;$ esto nos de 6 posibilidades. Si $\delta = 1$ y $\gamma = 2,$ queremos $2^{\alpha} \cdot 5 \leq 2^{2,}$, así que $\alpha = 0$ (1 posibilidad). Si $\delta = 1$ y $\gamma = 0$ o 1, entonces $\alpha = 0$ o 1; es decir hay 4 posibilidades. En total, las posibilidades son 24 + 6 + 1 + 4 = 35.

52. Tenemos $\underbrace{111...1}_{2r\ cifras} - \underbrace{222...2}_{r\ cifras} = \underbrace{111...1}_{r\ cifras} - \underbrace{000..0}_{r\ cifras} + \underbrace{111...1}_{r\ cifras} - 2(\underbrace{111...1}_{r\ cifras}) =$

$= \underbrace{111...1}_{r\ cifras}(10^r + 1 - 2) = \underbrace{111...1}_{r\ cifras}(10^r - 1) = \underbrace{111...1}_{r\ cifras}\ \underbrace{999...9}_{r\ cifras} = 9(\underbrace{111...1}_{r\ cifras})^2 = (\underbrace{333...3}_{r\ cifras})^2$

el cual es un cuadrado perfecto.

53. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 las medidas de los ángulos de *P* tomados en orden. Si por el contrario, se tiene el caso:

$$x_1 + x_2 < 216°,\quad x_2 + x_3 < 216°,\quad x_3 + x_4 < 216°,\quad x_4 + x_5 < 216°,\quad x_5 + x_1 < 216°$$

Sumando estas desigualdades se obtendría:

$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) < 1080°$ o sea que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 540°,$ lo cual es una contradicción, ya que la suma de los ángulos interiores de un pentágono es 540°.

54. El *k*-ésimo foco cambia de estado cada vez que una persona con número divisor de k cambia de posición los apagadores correspondientes, Así, un foco queda prendido exactamente cuando su número tiene un número impar de divisores. Ahora, si descomponemos *k* como producto de potencias de primos distintos: $k = p_1^{\propto 1} p_2^{\propto 2} .... p_r^{\propto r}$, entonces los divisores de *k* son de la forma $p_1^{\beta 1} p_2^{\beta 2} ... p_r^{\beta r}$ con $\beta_i \leq \alpha_i$ para toda i, Como para cada i las posibilidades para β^i de tal forma que $\beta_i \leq \alpha^i$ son $\alpha_i + 1,$ entonces *k* tiene $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1)$ divisores. Este número es impar si y sólo si cada α_i es par;

esto es, si y sólo si k es un cuadrado perfecto. Entonces los focos que quedan prendidos son exactamente aquellos que tienen asignado un número cuadrado 1,4,9,16,......

55. $\frac{AO}{OB} = \frac{ACSen\angle ACO}{CBSen\angle OCB} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{3}$

Luego como $AB = 4$ se tiene que $AO = \frac{5}{2}$ y $OB = \frac{3}{2} = PO$.

Por otro lado $CO^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$ y entonces

$\frac{CP}{PQ} = \frac{CO + OP}{2OP} = \frac{(3/2)\sqrt{5} + (3/2)}{2(3/2)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ que es la razón áurea;

56. Puesto que un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9. Se tiene que si $abcd = \left(= a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d\right)$ es divisible entre 9, entonces cualquier número que se forme con esas cifras también es divisible entre 9 $(bcda, cdab, etc.)$

Por lo tanto, basta contar los que satisfacen $a > b > c > d$ y luego multiplicamos por 4! = 24.

Si $a = 9,$, las posibilidades son:

9765, 9621, 9531, 9432, 9864, y 9873.

Que son seis.

Si $a = 8,$, tenemos:

8721, 8631, 8541, y 8532

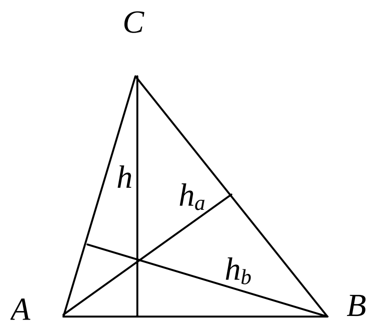
que son cuatro.
Para $a = 7,$

7641, 7632, y 7542

que son tres.

Si $a = 6$, sólo se tiene una posibilidad: 6543.
En total son $14 \cdot (4!) = 14 \cdot 24 = 332$.

57.



Sean h_a y h_b las alturas desde A y B respectivamente, entonces

$$\overline{AB} \cdot h \cdot \overline{AC} \cdot h_b \cdot \overline{BC} \cdot h_a = 8 \cdot \acute{a}rea\, del\, \Delta ABC = (\overline{AB} \cdot h)^3$$

lo cual es una constante y en consecuencia el producto $h \cdot h_a \cdot h_b$ alcanza su máximo cuando el producto $\overline{AC} \cdot \overline{BC}$ alcanza su mínimo. Como

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC}\, senC = \overline{BC} \cdot h_a = 2 \cdot \acute{a}rea\, del\, \Delta ABC$$

lo cual, también es una constante, $\overline{AC} \cdot \overline{BC}$ alcanza su mínimo cuando *senC* alcanza su máximo. Tendremos entonces dos casos:

a) Si $h \leq \frac{\overline{AB}}{2}$, entonces existe un triángulo *ABC* con ángulo recto en *C* para el cual *senC* alcanza su máximo, es decir 1.

b) Si $h > \frac{\overline{AB}}{2}$, el ángulo en C es agudo y alcanza su máximo cuando $\overline{AC} = \overline{BC}$.

58. Como $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, se tiene que $2^n \equiv (-1)^n (\mathrm{mod}\, 3)$ y entonces al sumar uno de ambos lados: $2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, luego $2^n + 1$ es divisible por 3 si y sólo si n es impar.

59. Nótese que

$$(S\text{-}a) + (S\text{-}b) + (S\text{-}c) = S$$

y así los perímetros se van dividiendo a la mitad en cada caso. Como

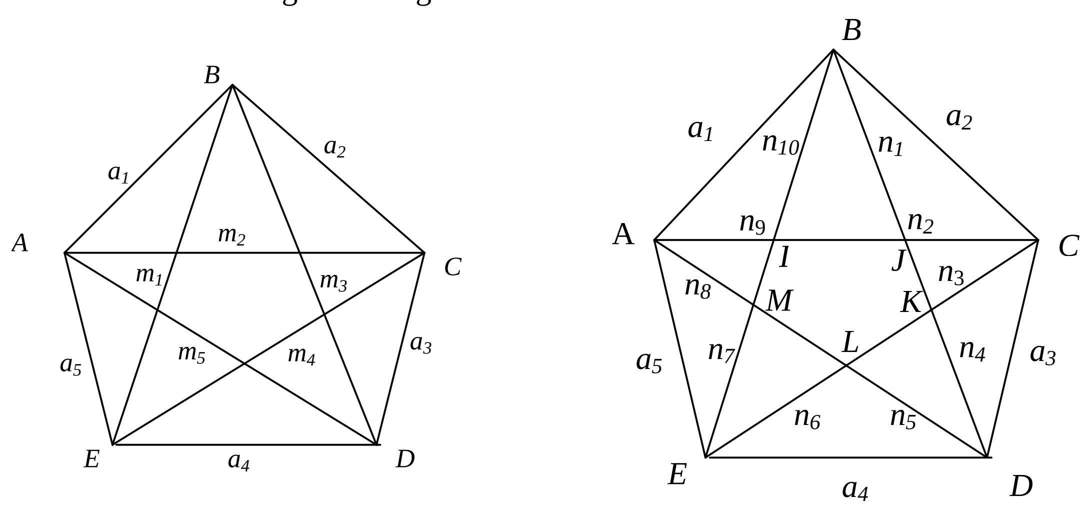
$$(S\text{-}a) - (S\text{-}b) = b - a$$

es claro que las diferencias de las longitudes permanecen igual. Si b - a es diferente de cero, entonces el proceso debe eventualmente terminar, puesto que de otra manera esta diferencia de lados sería mayor que el perímetro.

Si $a = b = c$, en cada paso las dimensiones de los lados se reducen a la mitad, continuando indefinidamente este proceso para triángulos equiláteros.

60. Consideremos la sucesión formada por los residuos bajo la división por 9 de la sucesión de Fibonacci. Es decir, consideremos la reducción módulo 9 de la sucesión de Fibonacci. Observemos que se puede construir ésta tomando los dos primeros términos iguales a 1 y, a partir del tercero, sumando los dos residuos anteriores y considerando su residuo; en otras palabras, podemos construir la sucesión utilizando la misma regla que para construir la sucesión de Fibonacci, pero haciendo las operaciones módulo 9. Así la sucesión es: 1,1,2,3,5,8,4,3,7,1,8,0,8,8,7,6,4,1,5,6,2,8,1,0,...; a partir de aquí se repite todo (pues 1 + 0 = 1 y 0 + 1 = 1) entonces en esta sucesión aparecen una infinidad de 0's; pero cada vez que aparezca 0 es porque 9 dividía al término correspondiente en la sucesión de Fibonacci, así que esto termina la demostración.

61. De acuerdo a las siguientes figuras



1) Por la desigualdad del triángulo en *ABC*, *CDE*, *DEA* y *EAB* tenemos:

$$a_1 + a_2 \geq m_2$$
$$a_2 + a_3 \geq m_3$$
$$a_3 + a_4 \geq m_4$$
$$a_4 + a_5 \geq m_5$$
$$a_5 + a_1 \geq m_1$$

2) Si *I, J, K, L, M* son los puntos de intersección de las diagonales y n_1, $n_2 ... n_{10}$ son las longitudes de los segmentos como en La figura, entonces:

$$n_1 + n_2 \geq a_2$$
$$n_3 + n_4 \geq a_3$$
$$n_5 + n_6 \geq a_4$$
$$n_7 + n_8 \geq a_5$$
$$n_9 + n_{10} \geq a_1$$

Pero además $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \geq n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_{10}$ (por que los segmentos *n*'s están contenidos en las diagonales).
Sumando las desigualdades:

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \geq m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$$

y

$$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_{10} \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

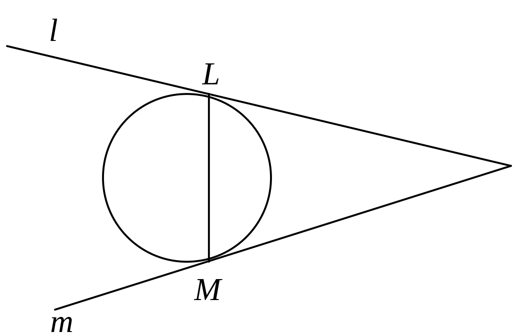
Por lo tanto obtenemos lo que se pedía:

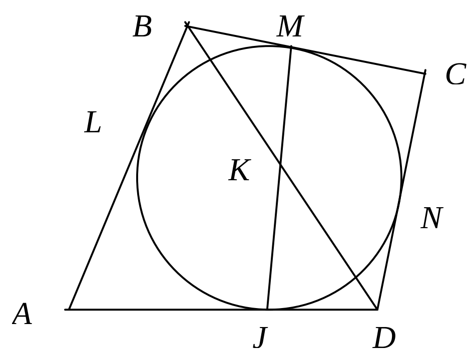
$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \geq m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

62. Vemos cuál es el dígito de las unidades de las potencias impares de 1997.
Obsérvese que si conocemos el dígito de las unidades d de una potencia impar de 1997, entonces el dígito de las unidades de la siguiente potencia impar, se obtiene al multiplicar los números d y el dígito de las unidades de 1997^2, o sea 9.
Por ejemplo, el dígito de las unidades de 1997 es 7, entonces el dígito de las unidades de 1997^3 es el de 9x7, 3.
El de 1997^5 es el de 3x9, que es 7 y así sucesivamente.
Es decir, el dígito de las unidades de 1997^{2n-1} es 7 si n es impar, y 3 si es par.
Además el dígito de las unidades de una suma de números es el mismo dígito de las unidades que se obtiene al sumar los dígitos de las unidades de cada uno de dichos números.
Por lo cual a_n es el dígito de las unidades de (7 + 3 + 7 + 3+....+ *a*)

donde a =7 si n es impar y a =3 si n es par.
Como 7 + 3 = 10, entonces a_n = 7 si n es impar y a_n = 0 si n es par.
Entonces la suma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1997}$ aparece un 7 por cada impar y un 0 por cada par entre 1 y 1997.
Por lo cual $a_1 + a_2 + a_3 + ... a_{1997}$ = 7 x 999 = 6993.

63. Observe que si las líneas l y m son tangentes a un círculo en los puntos L y M respectivamente, los ángulos que forman las líneas I y m con la cuerda LM son iguales (por simetría).





Entonces en la figura del problema original, los ángulos CMJ y MJD son iguales. Llamémosle α a dicho ángulo, y β a $\angle BKM = \angle CKJ$. Entonces $\angle KMB = \pi - \alpha$.
Si BM =a y JD =b son las longitudes de las tangentes desde B y D respectivamente.
Aplicando la Ley de Senos en los triángulos BKM y JKD tenemos:

$$\frac{BK}{sen(\pi - \alpha)} = \frac{a}{sen\beta} \qquad \frac{KD}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$$

Y como $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$ podemos dividir las igualdades para obtener: $\frac{BK}{KD} = \frac{a}{b}$
Es decir, el punto K divide a la diagonal BD en la razón dada por el cociente entre las tangentes desde los extremos de la diagonal. Como $BL = BM = a$ y $DN = NJ = b$ análogamente la línea LN divide a la diagonal BD en la razón $\frac{a}{b}$ por su punto de intersección. Entonces las líneas LN y MJ se cortan con BD en el mismo punto, o dicho de otra forma, la diagonal BD pasa por el punto de intersección de LN y JM.
Análogamente, la diagonal AC pasa por el punto de intersección de LN y JM.
Por lo tanto las diagonales AC y BD y las cuerdas JM y LN concurren.

64. Sabemos que un número es divisible entre otro si y sólo si es divisible entre cada uno de sus factores primos.

$1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$. Veamos ahora los criterios de divisibilidad:

Un número es divisible entre 4 si la suma de sus dos últimas cifras lo son, por lo tanto el número dado es divisible entre 4.

Un número es divisible entre 9 (3^2) si la suma de sus dígitos lo es. Observemos que en los números de 19 al 80 tenemos en el lugar de las decenas 10 veces cada número del 2 al 7, y una vez el 1 y el 8, por lo tanto el número tiene como suma de los lugares impares a $1 + 8 + 10(2+3+4+5+6+7) = 1 + 8 + 10 \times 27 = 279$. En los lugares de las unidades del 19 al 80 tenemos 6 veces los números del 1 al 8 y 7 veces los números del 1 al 8 y 7 veces el 9; entonces la suma de los lugares pares es $6(1+2+3+4+5+6+7+8) + 9 \times 7 = 6 \times 36 = 279$.

Si ahora sumamos los dígitos en lugar par más los de lugar impar obtenemos la suma de todos los dígitos del número que es $279 + 279 = 558$, y como la suma de los dígitos es divisible entre 9, el número que queremos también es divisible entre 9.

El número es divisible entre 5 porque termina en cero.

Un número es divisible entre 11 si la suma de sus dígitos en lugar par la suma de sus dígitos en lugar par menos la suma de sus dígitos en lugar impar es cero o múltiplo de 11. Como ya habíamos visto, la suma de los dígitos en lugar par es 279 y la de los lugares impares es 279, por lo tanto su diferencia es cero y el número es divisible entre 11.

Como es divisible entre 4,5 9 y 11 entonces es divisible entre 1980.

65. En la figura A podemos observar por la parte superior cómo se verían las esferas y las semiesferas. En la figura B vemos por la parte lateral la semiesfera de centro O y la esfera de centro O_1 y el punto T_1 de tangencia en la mesa.

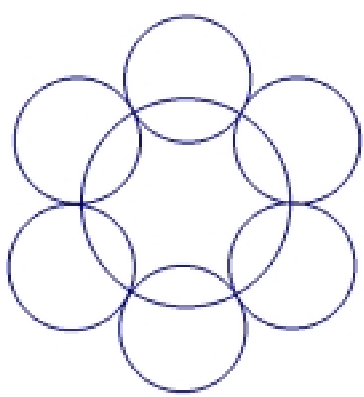


figura A

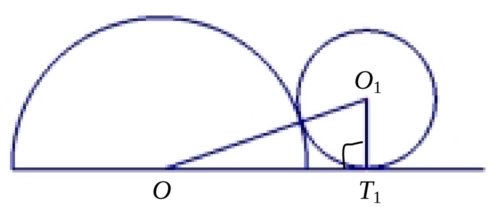


figura B

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$OO_1^2 = OT_1^2 + O_1T_1^2$ además de que $OO_1 = r + 1$, $O_1T_1 = r$ y $OT_1 = x$, sustituyendo obtenemos

$(r + 1)^2 = x^2 + r^2$

$x^2 = (r+1)^2 - r^2 = 2r + 1 \qquad x = OT_1 = \sqrt{2r+1}$

Como las esferas son tangentes a la mesa, la distancia entre sus centros es igual a la distancia entre sus puntos de tangencia con la mesa, es decir, $O_1O_2 = T_1T_2$, $O_2O_3 = T_2T_3$, etc.

En la figura C desechemos las esferas y quedémonos sólo con los puntos de tangencia.
Como todos los puntos tangenciales consecutivos equidistan unos de otros, el polígono $T_1T_2T_3T_4T_5T_6T_7$ es un hexágono regular, por lo que $\langle T_1OT_2 = \frac{\pi}{3}$ radianes, entonces $\Delta\, T_1OT_2$ es equilátero ya que también $OT_1 = OT_2$.

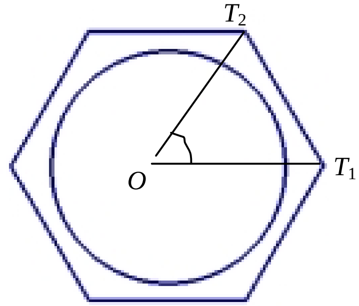


figura C

Ahora tenemos:

$OT_1 = OT_2 = \sqrt{2r+1}$
$T_1T_2 = 2r$ (por la suma de radios de dos esferas tangentes)

Como el triángulo T_1OT_2 es equilátero, $T_1T_2 = OT_1$
Sustituyendo

$\sqrt{2r+1} = 2r$
$2r + 1 = 4r^2$
$4r^2 - 2r - 1 = 0$
$\Rightarrow r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$
$r = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$
pero como $\sqrt{5} > 1$, $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$ es negativo, por lo que se descarta.

Por lo tanto, el resultado es $r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$

66. Queremos obtener al menos una descomposición en factores de $n^4 + 4$ (por lo menos de dos factores).
Así tratamos de convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto, pero necesitamos sumarle y restarle $4n^2$:

$$\left(n^4 + 4n^2 + 4\right) - 4n^2 = n^4 + 4$$
$$\left(n^2 + 2\right)^2 - 4n^2 = n^4 + 4$$

Si tomamos $\left(n^2 + 2\right)$ como a y $2n$, como b, sustituyendo obtenemos $a^2 - b^2$ lo que es una diferencia de cuadrados y se factoriza $(a - b)(a + b)$, sustituimos a y b, obteniendo:

$$\left[\left(n^2 + 2\right) - 2n\right]\left[\left(n^2 + 2\right) + 2n\right] = n^4 + 4$$

Así ya tenemos que $n^4 + 4$ es un número compuesto, porque tiene al menos dos factores.

67. Si observamos este número vemos que hay nueve números de una cifra, 90 de dos cifras, 900 de 3 cifras, etc.
Así, si vamos restando lugares, llegaremos al lugar 1997.

1997 lugares menos 9 (de los números menores a 10), menos 180 (de los de 2 cifras), son 1808.
Si le quitáramos los 2700 lugares de las cifras de 3 números, nos pasaríamos; o sea nos quedaría un número negativo de lugares faltantes.
Entonces necesitamos dividir nuestro sobrante, 1808 entre el número de cifras de cada 100 números (300): $\begin{array}{r} 6 \\ 300\overline{)1808} \\ 8 \end{array}$

Esto significa que hasta el 699 llevaremos 1800 lugares de los 1808 que quedaban (ó 1989 lugares totales); o sea, sobran 8.
Si continuamos el número a partir de aquí contando los 8 lugares, vemos que

.. 7 0 0 7 0 1 7 0 2......
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
1 2 3 4 5 6 7 8

El octavo número, o sea, el número de lugar 1997 es 0.

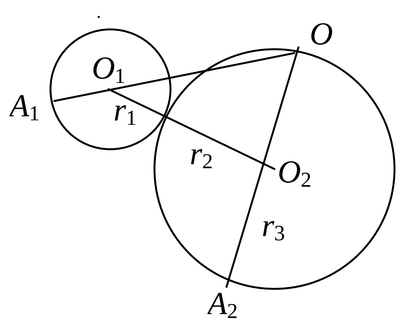
68. Para resolver este problema, usamos el siguiente resultado.
-Teorema de Ceva: Sobre los lados *AB*, *BC* y *CA* del triángulo *ABC* se encuentran los puntos *C'*,*A'* y *B'* respectivamente.

Entonces

Las rectas *AA'*, *BB'* y *CC'* concurren sí y sólo si $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$

Donde cada una de las razones se toma negativa si los segmentos en el numerador y denominador tienen orientación opuesta y positiva si tienen la misma orientación.

$O_1A = O_1A_1 = r_2$ $O_2A = OA_2 = r_2$



En el triángulo OO_1O_2 los puntos A_1 A y A_2 están sobre los lados (o sus prolongaciones) OO_1, O_1O_2, y O_2O_1 respectivamente y los dividen en las siguientes razones:

$$\frac{OA_1}{A_1O_1}=\frac{r_3}{r_1} \qquad \frac{O_1A}{AO_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad \frac{O_2A_2}{A_2O}=\frac{r_2}{r}$$

Entonces es claro que

$$\frac{OA_1}{A_1O_1}\cdot\frac{O_1A}{AO_2}\cdot\frac{O_2A_2}{A_2O}=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)\cdot\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\cdot\left(\frac{r_2}{r_3}\right)=1$$

Por lo tanto las líneas OA_1 O_1A_2, y O_2A_1 concurren.

69. Los números primos menores que 26 son: 2,3,5,7,11,13,17,19,23.
Como ningún número del conjunto M es divisible por un primo mayor a 26, la descomposición en primos de dicho número contiene sólo los primos mencionados. Por lo que podemos representar a cualquier número dentro de M como producto de potencias de dichos primos.

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \cdot 19^{\alpha_8} \cdot 23^{\alpha_9}$$

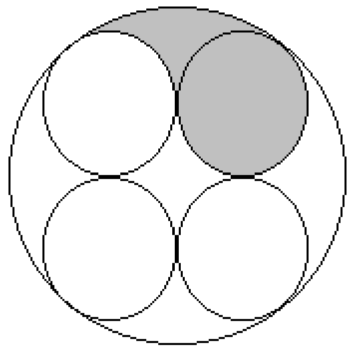
Observe que a este número se le puede asociar un número binario de 9 dígitos $a_1,a_2,a_3......a_9$, donde cada dígito a_i es el residuo de α_i, al dividirlo entre 2 (0 si es par, 1 si es impar) para
$i \in \{1,2,3....9\}$.
Como sólo hay $2^9 = 512$ números binarios de 9 dígitos (contando los que empiezan con ceros) entonces, por el principio de casillas, entre los 1990 números binarios asociados a cada número del conjunto, existen al menos 2 que son iguales.

Es decir, existen dos números n y m tales que los exponentes del primo respectivo en cada uno de los números son ambos pares ó ambos impares (su residuo entre 2 es el mismo). Por lo que en el producto nm, el exponente con que aparece cada primo es par porque es la suma de los exponentes con que aparece el mismo primo en n y m, los cuales son ambos pares ó ambos impares.
Entonces el producto nm es un cuadrado perfecto.

70. Para la solución de este problema conviene tener presente el algoritmo de la división como se enseña a nivel básico. Sea $M = (abcd)_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d$ un número cumple las condiciones del problema. Como $M/5$ debe tener cifras impares, d debe ser 5. Ahora, al momento de realizar la operación de división, empezamos dividiendo a entre $5: \frac{a}{5} = q + \frac{a_1}{5}$
Aquí q es el cociente y a_1 el residuo ("lo que se lleva"). Por las condiciones del problema , q debe ser 1; es decir, las posibilidades para a son 5, 7 ó 9. El siguiente paso es dividir el número $(a_1b)_{10} = a_1 \times 10 + b$ entre 5. Obsérvese que si b fuera 1 ó 3, el cociente de la división sería par (por ejemplo, el cociente de dividir 23 entre 5 es 4). Esto lleva a que b puede ser sólo 5,7 ó 9. Análogamente se demuestra que c puede ser sólo 5, 7 ó 9. Así pues, los números buscados tienen como primeras tres cifras a 5, 7 ó 9 y su última cifras es 5, hay $3 \times 3 \times 3 = 27$ de ellos.

71. Basta observar que la diagonal de una cuadrícula de 3×2 corta a 4 cuadrados, para darse cuenta que, en la cuadrícula total, el número de cuadros que corta la diagonal es $4 \times 100 = 400$.

72. De la figura,



observamos que el área buscada es la cuarta parte de la diferencia entre las áreas del círculo grande y la “estrella” que se forma en el centro. Para calcular éstas, observemos que al unir los 4 centros de los círculos pequeños se obtiene un cuadrado de lado 2. El área de la estrella que se encuentran dentro de él , por simetría cada una de estas porciones es una cuarta parte de tales círculos. Así pues el área de la estrella es $2^2 - \pi(1)^2 = 4 - \pi$.

Por otro lado, el diámetro del círculo mayor es la diagonal del cuadrado formado anteriormente más dos radios de los círculos pequeños (como se observa de la figura). Por lo tanto su radio es $\frac{2+\sqrt{2^2+2^2}}{2} = 1+\sqrt{2}$. El área buscada es entonces $\frac{1}{4}\left(\pi(1+\sqrt{2})^2 - (4-\pi)\right) = \pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1$.

73. Consideremos lo que ocurre el segundo año: pensemos que el cubo formado después de recubrir estuviera formado totalmente por cubitos de arista 3, se necesitarían 4 x 4 x 4 = 4^3 = 64 de tales cubos. Ahora, el cubo total formado en el primer año reemplaza en volumen 2 x 2 x 2 = 2^3 = 8. de nuestros cubos de arista 3. Por lo tanto el reubrimiento agregado en el segundo año es $4^3 - 2^3 = 56$. Por el mismo razonamiento, vemos que en el siguiente año se necesitan $5^3 - 3^3 = 98$ cubos de arista 4 para recubrir. En el año 1997, se necesitarán $1998^3 - 1996^3$ cubos de arista 1997 para recubrir; en este momento se han utilizado

$$(3^3 - 1^3) + (4^3 - 2^3) + (5^3 - 3^3) + ...+ (1997^3 - 1995^3) + (1998^3 - 1996^3)$$

cubos para recubrir. En la suma anterior, casi todos los sumandos se cancelan, excepto $1998^3 + 1997^3 - 2^3 - 1^3$; ésta es la respuesta.

74. $1 \geq a + b + c \Rightarrow 1 \geq (a + b + c)^2$

como: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

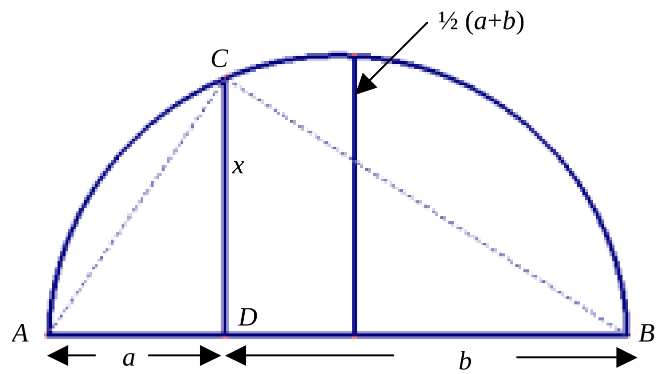
y: $a \geq b \geq c \Rightarrow ab \geq b^2 , \; bc \geq c^2 , \; ca \geq c^2$

$$\Rightarrow 2ab \geq 2b^2 , \; 2bc \geq 2c^2 , \; 2ca \geq 2c^2$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2c^2$$
$$(a + b + c)^2 \geq a^2 + 3b^2 + 5c^2$$

$$\therefore \; 1 \geq a^2 + 3b^2 + 5c^2$$

75.



Se tiene que $\Delta ADC \approx \Delta CDB$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

$$\therefore \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

76. Sean $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$

Si alguno de x, y, ó z fuera negativo, el problema estaría resuelto, por lo tanto analizaremos cuando $x, y, z \in \mathrm{R}^+$

$$x\,y\,z = \sqrt{x^2 y^2 z^2} = \sqrt{xxyyzz} = \sqrt{xyyzzx}$$

$$x\,y\,z = \sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}$$

Pero: $x + y = 2b$, $y + z = 2c$, $z + x = 2a$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{x+y}{2}, \quad c = \frac{y+z}{2}, \quad a = \frac{z+x}{2}$$

Como: $x\,y\,z = \sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right)$

Ya que: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ y $\sqrt{zx} \leq \frac{z+x}{2}$

$$\Rightarrow x\,y\,z \leq b\,.\,c\,.\,a = a\,.\,b\,.\,c$$

$$\therefore \ (a + b - c)\,(b + c - a)\,(c + a - b) \leq a\,b\,c$$

77. $9^2 - 1 = (9-1)(9+1) = 8\,(10) = 80$ 2 cifras = 2(1) cifras
$99^2 - 1 = (99-1)(99+1) = 98(100)=9800$ 4 cifras= 2(2) cifras
$999^2 - 1 = (999-1)(999+1) = 998(1000) = 998000$ 8 cifras= 2(3) cifras
$9999^2 - 1 = (9999-1)(9999+1) = 9998 \times 10^4$ 8 cifras = 2(4) cifras

$\vdots$

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{-cifras}}{}^2 - 1 = (\underbrace{99\ldots9}_{n\text{-cifras}} - 1)(\underbrace{99\ldots9}_{n\text{-cifras}} + 1) = \underbrace{99\ldots98}_{n\text{-cifras}} \times 10^n \quad \therefore \text{ hay } 2n \text{ cifras}$$

78. Un número impar lo podemos expresar como $2n$-1, donde $n \in Z$

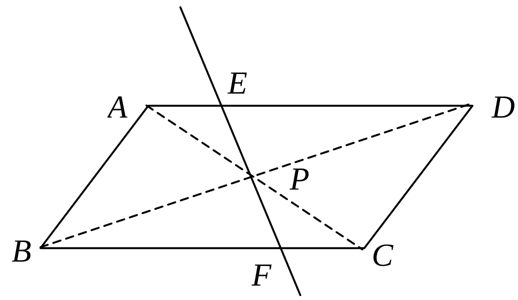
si $n = 1 \Rightarrow 2(1) - 1 = 1$ y $1 = 1^2 - 0^2$
si $n = 2 \Rightarrow 2(2) - 1 = 3$ y $3 = 2^2 - 1^2$
si $n = 3 \Rightarrow 2(3) - 1 = 5$ y $5= 3^2 - 2^2$
si $n = 4 \Rightarrow 2(4) - 1 = 7$ y $7= 4^2 - 3^2$
$\vdots$
si $n = k \Rightarrow 2k - 1= k^2 - (k - 1)^2$

$k^2 - (k - 1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = k^2 + 2k – 1 = 2k – 1$

$\therefore$

Todo número impar puede escribirse como la diferencia de dos números cuadrados.

79.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Como} \quad \angle PDE \cong \angle PBF \\ \qquad\quad \angle \text{PFB} \cong \angle PED \\ \qquad\quad \overline{BP} \cong \overline{PD} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\ PDE \cong \Delta\ PFB$$

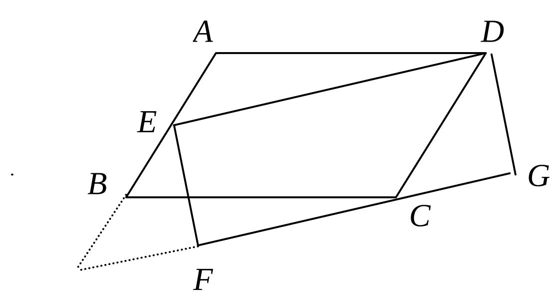
Análogamente tenemos que $\Delta\ APE \cong \Delta\ PFC$ y $\Delta\ APB \cong \Delta\ PCD$

Pero $\text{área}\ (ABFE) = \text{área}\,(\Delta\, ABP) + \text{área}\,(\Delta\, APE) + \text{área}\ (\Delta BPF)$

$= \text{área}\,(\Delta PCD) + \text{área}\,(\Delta PFC) + \text{área}\ (\Delta PED)$

$= \text{área}\ (FECD)$

80.



Para resolver este problema, recordemos el siguiente resultado:

“Si dos paralelogramos están sobre la misma base y entre las mismas paralelas, entonces son equivalentes (igual área)”.

De esta forma:

área (*ABCD*) = área (*CDEH*)

Donde “*H*” es el punto de intersección de las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{FG}$

De forma análoga se tiene:

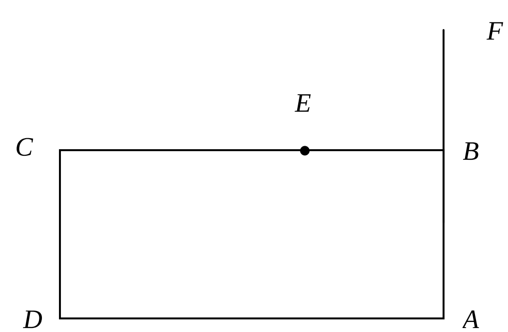
área (*CDEH*) = área (*DEFG*)
área (*ABCD*) = área (*DEFG*)

81. Hay 9 números de 1 cifra, 90 números de 2, 900 de 3 cifras, etc.
De aquí que sumando los lugares de los números de 1 hasta 6 cifras se tiene el lugar:

$$9 + 2(90) + 3(900) + 4(9000) + 5(90{,}000) + 6(900{,}000) = 5{,}888{,}889$$

por lo que para llegar al lugar 19888891 faltan 14,000,002 cifras. Como los siguientes números son de 7 cifras cada uno, entonces se necesitan los primeros 2,000,001 números de 7 cifras y tomar la segunda cifra del último, el cual es el número 3,000,000, por lo tanto, la cifra es el primer o de 3,000,000.

82. Consideremos la siguiente figura:



Para localizar el punto *E* sobre *BC*:

1. Prolongar el segmento *DC* por el lado de *C*.
2. Con el compás, localizar el punto *G* sobre la prolongación de *DC*, de tal manera que *CG* = *CB*.

3. Con el compás obtener el punto *H*, en el punto medio del segmento *DG*.
4. Haciendo centro en *H*, construir una semicircunferencia teniendo como diámetro *DG*, de tal manera que intersecte al segmento *CB* en el punto *E*.
5. Tenemos entonces que $(CE)^2 = (AD)(DC)$.

Para localizar al punto *F* en la prolongación de *AB*:

1. Prolongar el segmento *DA* por el lado de *A*.
2. Con el compás, localizar el punto I sobre la prolongación de *DA*, de tal manera que $AI = AB$.
3. Obtener el punto *J*, en el punto medio de *DI*.
4. Haciendo centro en *J* construir una semicircunferencia teniendo como diámetro *DI*, de tal manera que intersecte a la prolongación del segmento *AB* en el punto *F*
5. Tenemos entonces que $(AF)^2 = (AD)(DC)$.

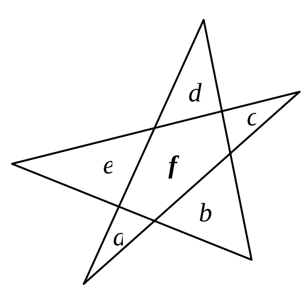
Entonces $CE = AF$ y $(CE)(AF) = (AD)(DC)$.

83. Tomamos $x = r - p = q + p$. Entonces:

$$x^2 = (r - p)\,(q + p) = rq + (r - q)p - p^2 = rq + 2p^2 - p^2 = rq + p^2 = 276$$

luego $x = 26$. Y *p es* un primo tal que $26 - p$ y $26 + p$ son primos. Probamos con los posibles primos *p* menores que 26 y se ve que eso sólo se cumple para $p = 3$.
Así pues, $p = 3$, $q = 23$, $r = 29$ *y* $n = pqr = 2001$

84. En la figura:



Como $a + f + d$ es par y $b + f + d$ también es par, tenemos que *a* y *b* son los dos pares o los dos impares. Usando el mismo argumento, llegamos a que *a, b, c, d* y *e* tienen la misma paridad. Así f tiene que ser par, puesto que $a + d$ es par (suma de dos pares o dos impares). Luego *a, b, c, d* y *e* tiene que ser impares por que la suma de las áreas es 31 y entonces *a, b, c, d* y *e* son los números del 1 al 9 en algún orden y

$$f = 31 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 = 6$$

85. Supongamos que de cierta forma y color hay una cantidad *C* de personajes. De éstos algunos permanecerán iguales, otros cambiarán sólo de color, otros sólo de forma y otros cambiarán tanto de forma como de color.

El número de los de *C* que quedan igual es: (0.2)(0.6)(*C*).
El número de los de *C* que cambian de color es: (0.8)(0.6)(*C*).
El número de los de *C* que cambian forma es: (0.2)(0.4)(*C*).
El número de los de *C* que cambian color y forma es: (0.8)(0.4)(*C*).

Se nos pregunta cuántos azules esféricos habrá después de un día. Hay varios tipos:
Los que permanecieron azules esféricos: (0.2)(0.6)(5000).
Los que eran rojo-esféricos y cambiaron de color: (0.8)(0.6)(6000).
Los que eran azul-piramidal y cambiaron forma: (0.2)(0.4)(10000).
Los rojo-piramidal que cambiaron color y forma: (0.8)(0.4)(9000).
Sumando estas cantidades obtenemos 7610, que es el resultado del problema.

86. 2001 = (3)(667)

$$2^3 = 8 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}_7)$$
$$3^3 = 27 \equiv -1 \ (\mathrm{mod}_7)$$

elevando ambas congruencias a la potencia 667, obtenemos:

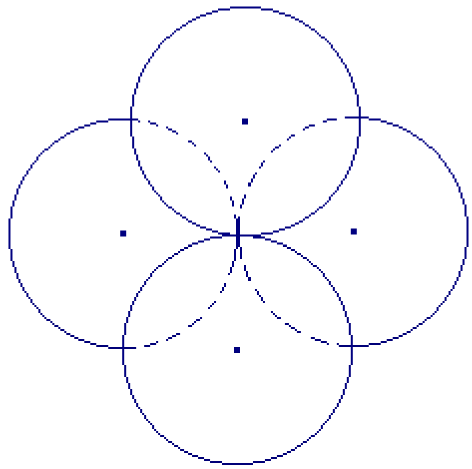
$$(2^3)^{667} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}_7)$$
$$(3^3)^{667} \equiv -1 \ (\mathrm{mod}_7)$$

sumando ambas congruencias, obtenemos:

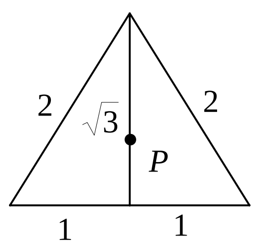
$$2^{2001} + 3^{2001} \equiv 0 \, (\mathrm{mod}_7)$$

lo cual significa que 7 es un divisor de $2^{2001} + 3^{2001}$.

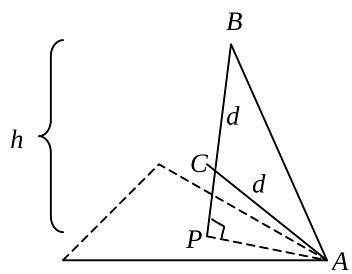
87. Consideremos el tetraedro T que une a los centros de las cuatro canicas. Notemos que T es un tetraedro regular de arista 2 y que el radio de la esfera es igual a la distancia *d* del centro C de T a uno de los vértices de T más el radio de la canica correspondiente que es uno. Entonces tenemos que calcular *d*.



La base del tetraedro es un triángulo equilátero de lado 2. Por el teorema de Pitágoras sus medianas miden $\sqrt{3}$ y la distancia de su centroide *P* a su vértice *A* es $\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



Con estos datos, podemos calcular la altura *h* del tetraedro, que resulta $h = \sqrt{2^2 - 2^2/3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$. Para calcular *d*, consideremos el triángulo APC como en la siguiente figura



Entonces por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}-d\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=d^2.$$

de aquí que $d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto el radio buscado es:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)\Big/\sqrt{2}$$

88. $$C_{100}^{200}=\frac{(200)(199)...(101)}{(1)(2)...(100)}$$

Busquemos el primo de dos dígitos más grande tal que:

a) Tenga un solo múltiplo entre 1 y 100.
b) Tenga exactamente dos múltiplos entre 101 y 200.

Tal primo es 61 (61 está entre 1 y 100, 61x2 y 61x3 entre 101 y 200)

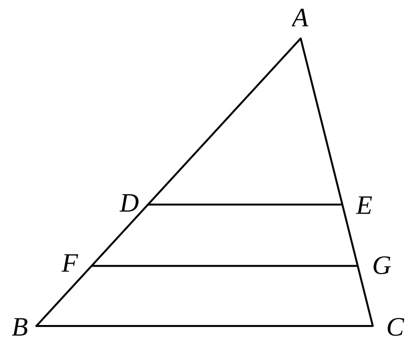
$$C_{100}^{200}=\frac{(200)(199)...(61\times 3)...(61\times 2)...(101)}{(1)(2)...(61)...(100)}$$

cancelando, obtenemos que C_{100}^{200} = 61*k*. Y por lo tanto el factor primo más grande de C_{100}^{200} es 61.

89. $$S(n,k)=\frac{(n+k-1)(n+k)}{2}=\frac{2nk+k^2-k}{2}=k\left(\frac{2n+k-1}{2}\right)$$

S(n,k) será un cuadrado perfecto si $\frac{2n+k-1}{2}=k$, es decir si $k = 2n - 1$.

90. En la siguiente figura:



Los triángulos *AED*, *AGF* y *ACB* son semejantes por tener un ángulo en común y los lados correspondientes proporcionales, así que:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{CB}=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{AG}{AC}=\frac{GF}{CB}=\frac{3}{4}$$

y las alturas de los trapecios son tales que h_1/h =1/2 donde h_1 corresponde a *EDFG* y h a *EDBC*, por lo tanto se tiene que:

área(*EDFG*) = $h_1(ED + GF)/2 = (h_1/2)(CB/2 + 3CB/4) \longrightarrow (h_1/2)(CB/2 + 3CB/4)$

área (*EDBC*) = $h(ED + CB)/2 \longrightarrow h_1(CB/2 + CB)$
de donde la razón de las áreas es 5/12.

91. ($\Rightarrow$) Si x es racional entonces $x=\frac{a}{b}$ a, b enteros y $b\neq 0$.

$x,\ x+a \ \ y \ \ \frac{(x+a)(x+a)}{x}$ son tres términos en progresión geométrica. Sólo nos restaría probar que $\frac{(x+a)(x+a)}{x}=x+c$, para algún entero c.

$$\frac{(x+a)(x+a)}{x}=\frac{x^2+2ax+a^2}{x}=x+2a+\frac{a^2}{a/b}=x+(2a+ab)$$

($\Leftarrow$) Sean $x+r,\ x+s,\ x+t$ tres elementos del conjunto en progresión geométrica, entonces:

$$\frac{x+s}{x+r}=\frac{x+t}{x+s}$$

despejando x, obtenemos:

$$x=\frac{rt-s^2}{2s-r-t}$$

siendo pues, x un número racional.

92. Racionalizando podemos establecer lo siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}=\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{x}$$

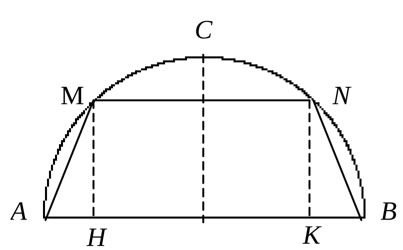
y entonces

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+k}}+\frac{1}{\sqrt{a+k}+\sqrt{a+2k}}+\frac{1}{\sqrt{a+2k}+\sqrt{a+3k}}$$

$$=\frac{\sqrt{a+k}-\sqrt{a}}{k}+\frac{\sqrt{a+2k}-\sqrt{a+k}}{k}+\frac{\sqrt{a+3k}-\sqrt{a+2k}}{k}$$

$$=\frac{\sqrt{a+3k}-\sqrt{a}}{k}=\frac{a+3k-a}{k(\sqrt{a+3k}+\sqrt{a})}=\frac{3}{\sqrt{a+3k}+\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$$

93. En la siguiente figura:



Sea $AM = x$. Denótese por H y K las proyecciones de M y N sobre AB.

Se tiene $MN = HK = AB - 2H = 2R - 2AH$.

El triángulo AMB es rectángulo en M, así que

$$AM^2 = (AB)(AH)$$

Por lo que $AH = (AM^2)/(AB) = x^2/2R$.

de donde $MN = 2R - 2(x^2/2R) = 2R - x^2/R$

hágase $MN = 2AM$

entonces $2R - x^2/R = 2x$

$x^2 + 2Rx - 2R = 0$.

Las raíces de esta ecuación serán soluciones al problema a condición de que x sea positiva e inferior a A, es decir,

$$0 < x < R\sqrt{2}$$

así que $x = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2} = R(\sqrt{3} - 1)$

y además $0 < R(\sqrt{3} - 1) < R\sqrt{2}$

94. Acomodemos las fracciones con denominador 1 en el primer renglón, los de denominador 2 en el segundo, los de denominador 2^2 en el tercero, etc.

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{2^2}{1} + \ldots \frac{2^9}{1} = 2^{10} - 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{2} + \ldots \frac{2^9}{2} = \frac{1}{2}(2^{10} - 1)$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^2} + \ldots \frac{2^9}{2^2} = \frac{1}{2^2}(2^{10} - 1)$$

. . .

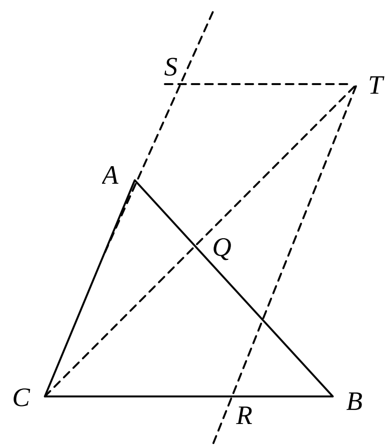
$$\frac{1}{2^9} + \frac{2}{2^9} + \frac{2^2}{2^9} + \ldots \frac{2^9}{2^9} = \frac{1}{2^9}(2^{10} - 1)$$

Así pues la suma S buscada es:

$$(2^{10} - 1)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^9}) = (2^{10} - 1)(\frac{1 - 1/2^{10}}{1/2})$$

$$S = (2^{10} - 1)(2 - 1/2^9)$$

95. Considere la siguiente figura:



$$\frac{AC}{AQ} = \frac{BQ}{AQ} \quad \text{pues } AC = BQ$$

$$= \frac{\acute{a}rea(BQT)}{\acute{a}rea(AQT)} = \frac{\acute{a}rea(BQC)}{\acute{a}rea(AQC)} = \frac{\acute{a}rea(BQT) + \acute{a}rea(BQC)}{\acute{a}rea(AQT) + \acute{a}rea(AQC)} = \frac{\acute{a}rea(BTC)}{\acute{a}rea(ATC)}$$

por lo tanto $\dfrac{AC}{AQ} = \dfrac{\acute{a}rea(BTC)}{\acute{a}rea(ATC)}$ ...... (1)

por otro lado

$$\frac{AC}{CS} = \frac{\acute{a}rea(ATC)}{\acute{a}rea(STC)} \text{ ...... (2)}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{RC}{BC} \quad \text{pues } AC = RC.$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{RC}{BC} = \frac{\acute{a}rea(RCT)}{\acute{a}rea(BCT)} = \frac{\acute{a}rea(STC)}{\acute{a}rea(BCT)} \text{ ......(3)}$$

de (1), (2) y (3) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AQ} \cdot \dfrac{AC}{CS} \cdot \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\acute{a}rea(BTC)}{\acute{a}rea(ATC)} \cdot \dfrac{\acute{a}rea(ATC)}{\acute{a}rea(STC)} \cdot \dfrac{\acute{a}rea(STC)}{\acute{a}rea(BCT)} = 1$

por lo que $AC^3 = AQ \cdot CS \cdot BC$

96. Si analizamos las potencias de 1, 2, ... , 9; veremos que n^{20} termina en 1 si n termina en 1, 3, 7 ó 9.

Hay 10 números n entre 1 y 93 tales que n^{20} termina en 1
Hay 10 números n entre 1 y 93 tales que n^{20} termina en 3
Hay 9 números n entre 1 y 93 tales que n^{20} termina en 7
Hay 9 números n entre 1 y 93 tales que n^{20} termina en 9

Así pues en total hay 38 números n entre 1 y 93 tales que n^{20} termina en 1.

97. Contar los lados de cuadriláteros convexos que no tienen un lado común con el polígono, es equivalente a contar el número de subconjuntos de cardinalidad 4 que hay del conjunto {1, 2, 3, ... , 14, 15} que no tengan dos enteros consecutivos, ni al 1 y 15 juntos. Para esto contamos los subconjuntos que no tienen dos enteros consecutivos y le quitamos los que tengan al 1 y al 15.

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ un subconjunto que cumpla

$$1 \le a < b < c < d \le 15$$

y consideremos los números

$$p = a - 1;\ \ q = b - a;\ \ r = c - b;\ \ s = d - c\ \ y\ \ t = 15 - d.$$

estos números satisfacen que

$$p,\, t \ge 0, \quad q,\, r,\, s \ge 2 \quad y \quad p + q + r + s + t = 14 \text{ .... } (1)$$

y además toda solución de (1) da un subconjunto de 4 elementos que no tiene dos enteros consecutivos.

Las soluciones de (1) corresponden a las soluciones de

$$k + l + m + n + o = 8 \quad con \quad k,\, l,\, m,\, n,\, o \ge 0 \text{ ...... } (2)$$

de las cual hay $\binom{12}{4}$ = 495.

Ahora quitamos los subconjuntos que tienen al 1 y al 15.Contando de forma análoga a la anterior, vemos que es lo mismo que contar los subconjuntos de cardinalidad 2 del conjunto {1, 2, ... , 11} y que no tenga enteros consecutivos de los cuales hay $\binom{10}{4}$ = 45.

Por lo tanto hay 450 cuadriláteros que satisfacen las condiciones del problema.

98. Consideremos la distribución:

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

Resulta:

$$S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi =$$

$$100\,(a + c + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + e + h) + (g + h + i + c + f + i) =$$

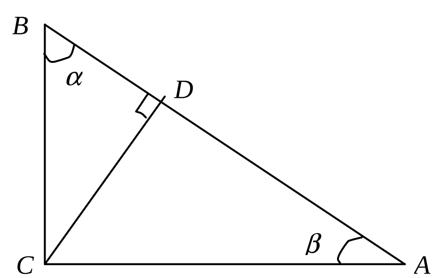
$$200\,a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$$

Módulo 9 tenemos:

$$\mathrm{S} = 2(a + b + c + \ldots.h + i) = 2.45 = 0$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

99. En la figura:



observemos que el triángulo *BDC* es semejante al triángulo *BCA* pues ambos son rectángulos y tienen común el ángulo β. Entonces $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{BD}$. Llamemos t a este cociente, entonces $AC = t\ DC$ y $BC = t\ BD$. El área del triángulo *ABC* es igual a $\frac{AC \cdot BC}{2}$ y la del triángulo *BDC* vale $\frac{BD \cdot DC}{2}$, pero por hipótesis $BD \cdot DC = \frac{1}{4} AC \cdot BC$, de manera que $4 = \frac{AC}{DC}\frac{BC}{BD} = t^2$, por lo que $t = 2$.

Así AC = 2CD y senα =1/2; esto implica que α = 30° y en consecuencia β = 60°.

100. $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{a_2 + 1} = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, ... etc.

así pues el producto de los primeros 15 términos de la sucesión será:

$$\left(\frac{1}{\cancel{1}}\right)\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}\right)\left(\frac{\cancel{8}}{\cancel{13}}\right)\left(\frac{\cancel{13}}{\cancel{21}}\right)\left(\frac{\cancel{21}}{\cancel{34}}\right)\left(\frac{\cancel{34}}{\cancel{55}}\right)\left(\frac{\cancel{55}}{\cancel{89}}\right)\left(\frac{\cancel{89}}{\cancel{144}}\right)\left(\frac{\cancel{144}}{\cancel{233}}\right)\left(\frac{\cancel{233}}{\cancel{377}}\right)\left(\frac{\cancel{377}}{\cancel{610}}\right)\left(\frac{\cancel{610}}{987}\right) =$$

cancelando, obtenemos

$$(a_1)(a_2)(a_3)...(a_{15}) = \frac{1}{987}.$$

Bibliografía

1. Pérez Seguí, María Luisa
   Problemario de la IX Olimpiada de Matemáticas en Michoacán
   Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 1995.

2. Varios autores
   Guía de Estudio para la Olimpiada de Matemáticas en Querétaro, 1997.

3. Bulajich, Radmila; Bustamante, Jorge
   Problemario para la XI Olimpiada de Matemáticas en Morelos
   Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 1997.

4. Varios autores
   Problemario para la XI Olimpiada Estatal de Matemáticas en Jalisco
   Universidad de Guadalajara, 1997.

5. Varios autores
   Problemas para la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
   1987-2001 (16 folletos).

6. Varios autores
   Olimpiadas de Matemáticas, 149 problemas, seis años de éxito. 1993.

7. Olimpiada Matemática Mexicana
   Página Web: http://einstein.posgrado.unam.mx/omm/

8. Olimpiada Matemática Argentina
   Página Web: http://www.oma.org.ar/

9. Olimpiada Matemática Española
   Página Web: http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimprob.htm