

# Causas y factores de retraso en el aprendizaje de las matemáticas



# Dificultades y procesos de aprendizaje en Matemáticas.

- Prof. Dr. Ricardo López Fernández.
- Dep. Didáctica de las Matemáticas y Didáctica de las Ciencias Experimentales.  
Facultad de Educación.
- Universidad de Salamanca.

# Metodología de diagnóstico

- Informe médico. En caso de causas endógenas específicas.
- Informe Tutor sobre cuestionario de Observación.
- Entrevista familiar.
- Aplicación de test específicos de diagnóstico.

# Diagnóstico de los trastornos en el aprendizaje de las matemáticas

## Test de diagnóstico

- Retrasos inespecíficos del desarrollo cognitivo
  - Escala de inteligencia para niños de D. Weschler (1949,WISC)
  - Matrices progresivas de J.C. Raven
- Trastornos en el aprendizaje aritmético
  - Serie de test analíticos sobre el aprendizaje aritmético de L.J.Brukner
- Retrasos del desarrollo perceptivo-motor
  - Test de Lateralidad Usual de M.Auzias
  - Test de la figura humana (esquema corporal) de F.Goodneough
- Retrasos en la estructuración perceptiva espacio-temporal
  - Reversal test de A.W,Edfeldt, 1955
  - Test gestáltico Viso-motor de L.Bender
  - Test de las estructuras rítmicas de M.Stambak
- Trastornos de personalidad
  - Test de familia de M.Porot
  - Test sobre la figura humana de K.Machover

# Principios básicos en el tratamiento

- Los principios estratégicos básicos en el tratamiento de dificultades son los siguientes:
- Desarrollo habilidades cognitivas y comunicacionales.
- Mejora de las dificultades globales en el ámbito de la conducta.
- Desarrollo y mejora de su educación social.
- Aportar conocimiento específicos de materias del curriculum escolar mediante métodos acorde con las discapacidades que generan sus dificultades.

# Practica asociada.

- Desarrollar una búsqueda y selección , para comentar, de un articulo que trate sobre Aprendizaje de las matemáticas y su relación con alguno de los trastornos indicados. Remitir el articulo(o enlace) y el comentario.
- Buscar alguno o algunos de los test de diagnóstico indicados. Remitirlo como práctica.

# Proyección del trastorno en el proceso de aprendizaje.

- La naturaleza del trastorno incide siempre, en la disfunción de uno o más de los cinco sistemas de representación que intervienen en el proceso de aprendizaje y por lo tanto en la ausencia de desarrollo eficiente de las funciones que se generan en su interacción.
- Colateralmente, impiden la integración cognitiva de todos los sistema de representación y por ello un aprendizaje bien total o parcialmente disgregado y deficiente.
- Por último y como consecuencia de lo anterior el modelo estándar de evolución cognitiva de la inteligencia y de sus fases, en general se ve afectado.

# Dos teorías básicas para el aprendizaje del número natural

- Teoría de J. Piaget. La equipotencia o coordinabilidad de los conjuntos como mecanismo de aprendizaje.
- Teoría de Schaeffer y otros. El recuento como componente esencial en el proceso de aprendizaje.



# Teoría de J. Piaget.

- Etapas y estadios en el proceso de aprendizaje del número natural.
- El concepto de conjuntos coordinables. La cardinalidad.
- Las fases de aprendizaje y reconocimiento de la coordinabilidad o equipotencia de conjuntos. El concepto de Cardinal.
- La conservación de la cardinalidad.
- La reversibilidad de los procesos.
- La conexión cardinal-ordinal.

# Procesos evolutivos y construcción del conocimiento.

- Fase sensoriomotórica.
- Fase del pensamiento concreto.
- Fase de la abstracción.
- Fundamentación psicológica del diseño curricular.

# El recuento como base esencial del aprendizaje. Teoría de Schaeffer

- El recuento mecánico. Hasta 10.
- La conexión recuento-cardinal.
- Los principios que rigen el recuento. Aprendizaje.
- Conexión cardinal-ordinal en el proceso de contar.

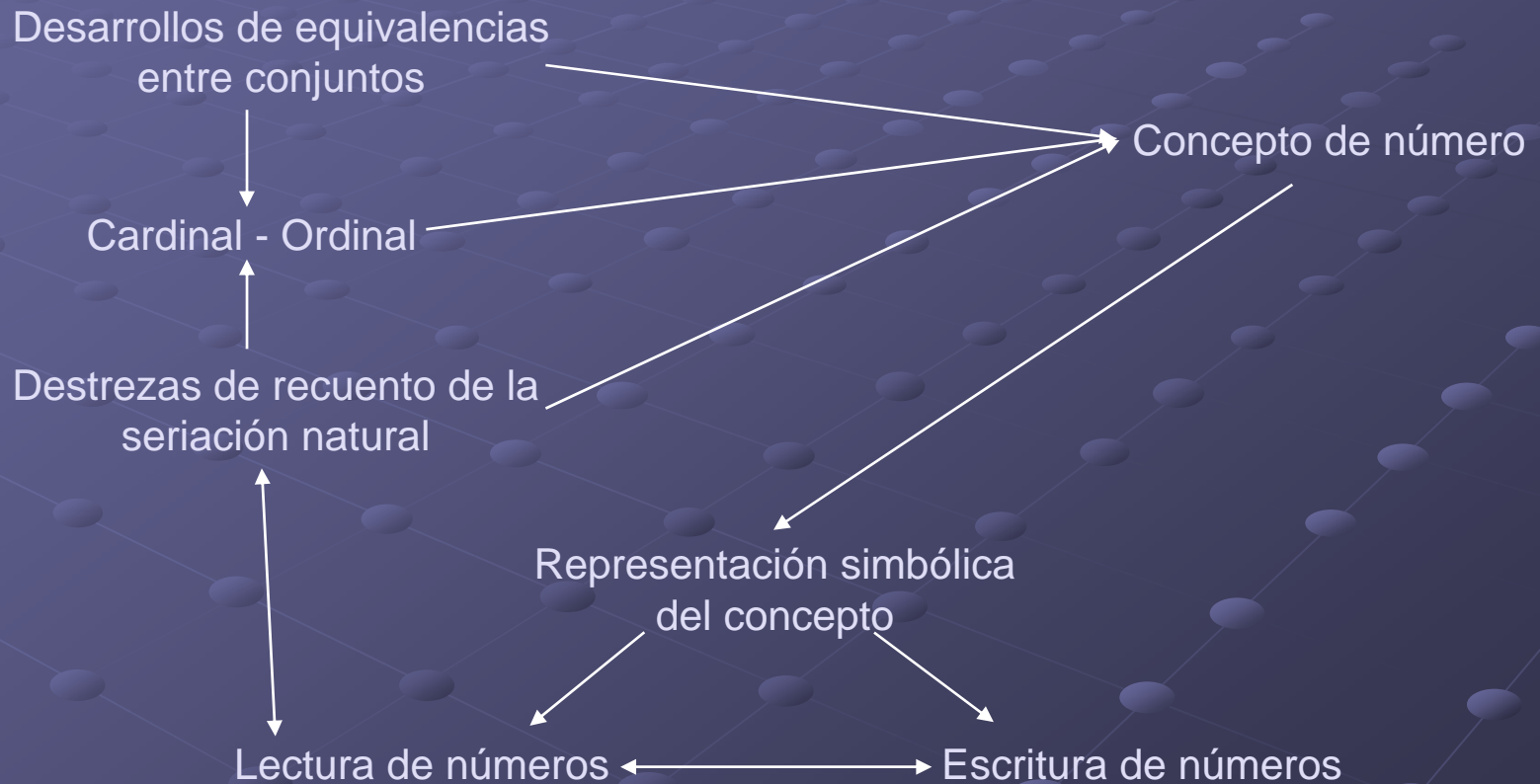
# Semejanzas y diferencias entre las teorías de Piaget y Schaeffer.

- La naturaleza epistemológica de la teoría de Piaget.
- La naturaleza empírica de la teoría de Schaeffer.
- La intersección de ambas teorías en la fase final del aprendizaje. Conexión cardinal-ordinal.

# Componentes en el aprendizaje del número.

- El aprendizaje conceptual. Equipotencia y recuento. Cardinal-Ordinal.
- El aprendizaje instrumental. El recuento y los principios que lo determina,
- El aprendizaje de su representación. Aprendizaje lecto-.escritor.

# MAPA CONCEPTUAL DEL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE NÚMERO



# Piaget versus Schaefer.

- Metodológicamente la enseñanza basada en el recuento según el patrón del modelo de Shaeffer, debe constituirse en la guía del proceso de aprendizaje de los alumnos de educación especial.

# Aprendizaje del álgebra básica de los números naturales

- Conocimiento de la operación suma

- . Concepto
- . Propiedades
- . Algoritmos de cálculo

- Conocimiento de la operación de sustracción

- . Concepto
- . Propiedades
- . Algoritmos de cálculo

- Conocimiento de la multiplicación

- . Concepto
- . Propiedades
- . Algoritmos de cálculo

- Conocimiento de la división entera

- . Concepto
  - . Exactas
  - . Inexactas
- . Propiedades
- . Algoritmos de cálculo

- Automatismos de cálculo. Cálculo mental  
Uso de la calculadora



# El proceso de aprendizaje de la suma.

Inicio del desarrollo intuitivo de la adición a los 3 años unidos a la actividad de unir, añadir...etc.

La suma y el recuento.

- . Fases del aprendizaje:
  - Recuento perceptual
  - Recuento figurativo
  - Recuento motor
  - Recuento verbal
  - Recuento abstracto

Finalización del proceso sobre los 8 años ,  
junto al control total de los principios que rigen  
el recuento natural.

# El proceso de aprendizaje de la sustracción

- Basado también en el recuento pasa por las mismas fases que las del aprendizaje de la suma. En este caso la estrategia se basa en el recuento hacía atrás. Es más complejo cognitivamente y por ello va muy ligado al aprendizaje de los principios que rigen el recuento de los números naturales.

# El aprendizaje de la multiplicación. Tres estrategias:

MENOR  
A  
MAYOR  
GRADO  
DE  
DIFICUL  
TAD

## ENUNCIADO

Juan tiene 3 caramelos.  
María 4 veces más.  
¿Cuántos tiene María?

## FACTOR MULTIPLICANTE

4 niños tienen 3 caramelos cada uno  
¿Cuántos tienen en total?

## RAZÓN

Un caramelo se fabrica en tres sabores distintos y con cuatro tamaños diferentes  
¿Cuántos caramelos distintos puedes comprar?

## PRODUCTO CARTESIANO

# El aprendizaje de la división. Dos estrategias.

MENOR  
A  
MAYOR  
GRADO  
DE  
DIFICUL  
TAD

ENUNCIADO

Juan tiene 12 caramelos.  
Los coloca en 4 filas iguales.  
¿Cuántos tiene que poner en cada fila?

REPARTICIÓN

Juan tiene 12 caramelos.  
Los coloca en filas de 4.  
¿Cuántas filas forma?

AGRUPAMIENTO

# Desarrollo del aprendizaje de los algoritmos y fuentes de dificultades básicas.

Proceso de aprendizaje:

- Conocimientos de las tabulaciones  
El aprendizaje de "rutina"
- Comprensión del concepto de valor posicional  
El aprendizaje significativo

Errores del aprendizaje:

- Desconocimiento básico de la operación
- Desconocimiento de tablas
- Desconocimiento del procedimiento
- Aplicación incorrecta del procedimiento
- Incomprensión de la función neutra del cero

# Dificultades en el aprendizaje algorítmico

- El aprendizaje de las reglas que determinan y definen el sistema decimal de numeración se constituye como la base esencial para eliminar las fuentes de dificultades del aprendizaje algorítmico. En particular, la incompreensión del concepto de valor posicional se constituye como el factor más determinante en las dificultades de aprendizaje de los algoritmos operatorios tanto de número enteros como de número decimales

# La importancia del cálculo mental:

- Las estrategias informales en el cálculo
- La función del recuento como estrategia esencial
- Características de las estrategias mentales:
  - . El método holístico: Trabajo con números completos
  - . Comprensivos
  - . Icónicos

# *RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ( I )*

*La capacidad para resolver problemas desarrolla los dos valores básicos de la enseñanza de la matemática:*

- Valor instrumental*
- Valor cognitivo*

*Desarrolla el valor instrumental por cuanto el problema proyecta la aplicación práctica de la teoría confiriéndole su verdadero sentido*



# *RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ( I I )*

- *Desarrolla el valor cognitivo, por cuanto la resolución de problemas significa:*
- Potencia la capacidad para procesar información  
Desarrolla la capacidad para modelizar situaciones  
Desarrolla todo tipo de estrategias comprensivas y resolutivas de situaciones complejas.
- Incrementa la capacidad de formación, relacionándola con las destrezas y capacidad analítica  
Desarrolla actitudes y aptitudes positivas para el aprendizaje

# Cognición y procesos de resolución de problemas

- Habilidades y destrezas cognitivas implicadas: Comprensivas, algorítmicas, heurísticas.
- Habilidades y destrezas metacognitivas implicadas:
- Transferencia, Autoevaluación, monitorización de procesos, planificación, toma de decisiones.....

# ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SEGÚN LA TEORÍA DE G.POLYA ( I ).

- 1.Fase de la comprensión del enunciado:
  - La comprensión del problema. Las hipótesis y las tesis. Los datos y las incógnitas
- 2.Fase de búsqueda de la estrategia de resolución. Las heurísticas de G. Polya:
  - . Pensar en imágenes o en representaciones gráficas. Visualizar el problema
  - . Adoptar el punto de vista opuesto. Suposición del contrario a lo que se va a hacer
  - . Suponer el problema resuelto. Pensar hacia atrás
  - . Modelizar la situación, proyectándola a un problema más sencillo

# ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN LA TEORÍA DE G.POLYA (II).

3. Fase del pensamiento algorítmico. Selección y aplicación de la estrategia adecuada.

4. Fase de Revisión, autoevaluación y monitorización retrospectiva del proceso desarrollado.

# ***PRINCIPIOS ACTITUDINALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ( I ):***

- PRINCIPIO DE ECONOMÍA. No ir más allá del problema planteado si no hay necesidad.*
- PRINCIPIO DE AUSENCIA DE FRONTERA. No se puede determinar de antemano los recursos necesarios para el desarrollo.*
- PRINCIPIO DE PERSEVERANCIA. No se puede ceder en ningún interrogante que no haya sido resuelto.*

## ***PRINCIPIOS ACTITUDINALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ( I I):***

- - PRINCIPIO DE VARIEDAD. Adoptar diferentes perspectivas para abordar las cuestiones planteadas. Reflexionar sobre el desarrollo al que conducen los diferentes puntos de vista.*
- PRINCIPIO DE PREFERENCIA. Seleccionar con claridad, los conocimientos disponibles, los elementos auxiliares necesarios para el desarrollo y los procedimientos adecuados para la ejecución del plan de resolución.*

# para el desarrollo de habilidades y destrezas en resolución de problemas ( I ).

Se orientan a generar destrezas en el ámbito del pensamiento heurístico y a desarrollar habilidades en el ámbito del sistema de representación ejecutivo-heurístico.

Desarrollan a su vez capacidades y destrezas en el ámbito de la transferencia y por lo tanto resulta esencial para la creación de competencias.

La pauta del diseño del recurso o programa específico para generar estas destrezas, la marca la secuencia de las fases cognitivas que la teoría de Polya establece. Es decir, un programa o recurso instructivo con la finalidad indicada, debe de contener lo siguiente:

# Diseño instructivo de programas para el desarrollo de habilidades y destrezas en resolución de problemas ( I I).

- Actividades comprensivas lectoras.
- Actividades comprensivas de conexión entre el lenguaje convencional y el lenguaje matemático. Traducción.
- Actividades de indagación y búsqueda de estrategias resolutorias, siguiendo los patrones heurísticos de Polya. La graduación cognitiva de las heurísticas de Polya y su adecuación a la evolución cognitiva del alumno y de la etapa educativa es esencial.
- Actividades de desarrollo de destrezas algorítmicas para la aplicación de la estrategia de resolución encontrada.
- Actividades de desarrollo de destrezas metacognitivas mediante la creación y fomento de rutinas de autochequeo y evaluación de los procesos cognitivos empleados, automonitorización de estos y en suma comprobación de la certeza de los resultados obtenidos.



# Proceso de aprendizaje de la geometría: Dificultades y trastornos.

## ▪ *Mapa del cerebro.*

### *Hemisferio izquierdo:*

*Piensa simbólicamente. En palabras.*

*Organiza secuencialmente la información.*

*Efectúa el análisis desde las partes hasta el todo.*

*Elabora procesos de generalización.*

*Constituye el centro del lenguaje y del habla.*

*Organiza el lenguaje.*

*Procesa información en el nivel abstracto.*

# *Mapa del cerebro.*

## *Especialización de funciones:*

### *Hemisferio derecho:*

- *Piensa en imágenes*
- *Estructura el espacio y la visión*
- *Es el centro de la intuición y la creación*
- *Memoriza los hechos*
- *Constituye el centro para el procesamiento de la información que se percibe, se comprende y se memoriza*
  - *La información se procesa, atendiendo esencialmente a su configuración global. Desde el todo hacia las partes*

# Proceso de aprendizaje de conceptos espaciales. (según Piaget, Inhelder, ...)

- La percepción.

  - Generada por el procesamiento de la información obtenida por el contacto directo o experimental

- La representación.

  - Generada por la evocación de objetos en ausencia de ellos

- Relación entre el proceso de adquisición de conceptos geométricos y las etapas piagetianas

  - . Sensoriomotórica

    - Percepción e inicio del proceso de representación de imágenes

  - . Operaciones concretas

    - Perfeccionamiento y consolidación del proceso de representación

  - . Operaciones formales

    - Formalización abstractas de conceptos geométricos representados

# *Fases y niveles en la adquisición de conceptos geométricos según la teoría de Piaget.*

## *- Fase topológica*

- . Proximidad. Cercanía-lejanía*
- . Separación-continuidad*
- . Ordenación*
- . Cierres*

## *- Fase proyectiva*

- . Relación entre la perspectiva visual y la configuración geométrica*

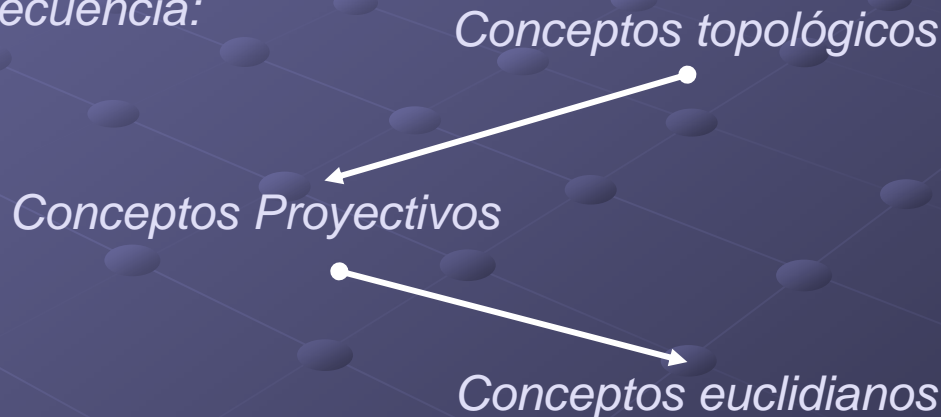
## *- Fase Euclidea*

- . Distancias*
- . Ángulos*

## *Valoraciones críticas a la teoría de Piaget*

- *Los procesos de percepción y representación no solo no se diferencian con nitidez sino que se solapan, reforzándose*
- *Los resultados de las experiencias piagetianas están contaminados por la metodología aplicada a la investigación.  
(Por ej. Relación entre la facilidad de reconocimiento al tacto de formas de figuras y el tamaño de estas)*

- *La secuencia:*



*Por lo tanto no se consideran fiables los experimentos desarrollados*

# Niveles en el aprendizaje de la Geometría según Van Hiele (I)

## Los niveles Van Hiele son cinco:

Nivel 1: Visualización o Reconocimiento

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Ordenación o clasificación

Nivel 4: Deducción formal

Nivel 5: Rigor

## Nivel 1

En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades

Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares

*Ejemplo:* identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes

# Niveles en el aprendizaje de la Geometría según Van Hiele (II)

## ● Nivel 2

Se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras

*Ejemplo:* un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales

## ● Nivel 3

Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias

Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales

*Ejemplo:* en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales



# Niveles en el aprendizaje de la Geometría según Van Hiele (III)

## Nivel 4

En este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.

Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática

*Ejemplo:* demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio

## Nivel 5

Se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar

Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido

# *Causas de los trastornos en el aprendizaje de los conceptos geométricos*

*- Discapacidades sensoriomotóricas:*

*. Perceptivo-visuales*

*. Motóricas*

*- Trastornos singulares:*

*. Dislexias*

*- Trastornos cognitivos inespecíficos*

*Por último señalar la relación existente entre los procesos de aprendizaje del lenguaje y ciertos conceptos espaciales*

# *Trastorno en el aprendizaje de conceptos geométricos*

*La enseñanza de la geometría en la escuela infantil y en primaria no requiere el desarrollo de procesos deductivos que requieran un pensamiento lógico-formal*

*Por ello, las dificultades en el proceso de aprendizaje de estos conceptos vienen generadas por trastornos específicos que obstaculizan el aprendizaje de las primeras nociones espaciales*

# Dificultades en el proceso de aprendizaje

● *Estas alteraciones se pueden manifestar en:*

- *Dificultad para construir el esquema corporal*
- *Dificultades para identificar la lateralidad*
- *Dificultad para organizar el espacio en relación al cuerpo*
- *Dificultad para descentrar la perspectiva egocéntrica*
- *Dificultad para reconocer la conservación de conceptos geométricos euclidianos (longitud, área... etc)*