8 Movimientos

8.1 Movimiento

Se llama **movimiento** a una aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, no necesariamente lineal, que se puede escribir en la forma:

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A \text{ una matriz ortogonal } (A^t A = I) \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Obviamente, cuando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ el movimiento es una aplicación lineal ortogonal, y en caso contrario no es aplicación lineal.

8.2 Observaciones

1. Un movimiento, $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$, es la composición de una aplicación ortogonal con una traslación:
$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_{\mathbf{b}}} & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u} & \longrightarrow & A\mathbf{u} & \longrightarrow & A\mathbf{u} + \mathbf{b} \end{array}\right\} \Longrightarrow f = T_{\mathbf{b}} \circ A$$

2. Los movimientos conservan las distancias: Si $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$, entonces
$$d\,(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) = \|(A\mathbf{u} + \mathbf{b}) - (A\mathbf{v} + \mathbf{b})\| = \|A(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$
ya que las aplicaciones ortogonales conservan la norma.

8.3 Puntos fijos de un movimiento

Se llama **punto fijo** de un movimiento $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$ a cualquier punto $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} + \mathbf{b} = \mathbf{w}$.

8.4 Movimientos en $\mathbb{R}^2$

1. **Traslación de vector $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$:**
$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} = I\mathbf{u} + \mathbf{v}$$
En forma cartesiana:
$$T_{\mathbf{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$$
No tiene puntos fijos, salvo en el caso trivial de que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (en este caso el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

2. **Giro de centro $\mathbf{c} = (x_0, y_0)$ y ángulo α:** Se puede obtener como la composición de una traslación de vector $-\mathbf{c}$ (que traslada el centro de giro al origen), con un giro centrado en el origen de ángulo α, y con una traslación de vector $\mathbf{c}$ (que devuelve el centro de giro a su posición inicial). Por lo tanto:
$$G_{\mathbf{c},\alpha}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{u} + (\mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde A es la matriz del giro centrado en el origen de ángulo α. En forma cartesiana:

$$G_{\mathbf{c},\alpha}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

El único punto fijo es el centro de giro, salvo en el caso trivial de que $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$ (en estos casos el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

3. **Simetría respecto de la recta** $r \equiv ax + by + c = 0$: Si $\mathbf{c} \in r$ es un punto de la recta, esta simetría se puede obtener como la composición de una traslación de vector $-\mathbf{c}$ (que transforma la recta en otra paralela que pasa por el origen), con una simetría respecto de la recta $ax + by = 0$, y con una traslación de vector $\mathbf{c}$ (que devuelve la recta a su posición inicial). Por lo tanto:

$$S_r(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{u} + (\mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de la simetría respecto de la recta $ax + by = 0$. Todos los puntos de la recta r son puntos fijos.

4. **Simetría deslizante respecto de la recta** $r \equiv ax + by + c = 0$ **con vector** $\mathbf{v} \parallel r$: Es la composición de una simetría respecto de la recta $r \equiv ax + by + c = 0$ con una traslación de vector $\mathbf{v}$. Por lo tanto, si $\mathbf{c} \in r$, su ecuación es:

$$SD_{r,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ S_r(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{c} - A\mathbf{c})$$

donde A es la matriz de la simetría respecto de la recta $ax + by = 0$. No hay puntos fijos, salvo en el caso en que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (el movimiento es una simetría sin deslizamiento y los puntos fijos son los de la recta r).

8.5 Ejemplos

1. Las ecuaciones de la traslación de vector $\mathbf{v} = (1, -1)$ son

$$T_{\mathbf{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{array} \right.$$

2. Las ecuaciones de un giro con centro en $\mathbf{c} = (1, 2)$ y ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ son:

$$G_{\mathbf{c},\alpha}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = 3 - y \\ y' = x + 1 \end{array} \right.$$

3. Para hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta $r \equiv y - x = 1$ se considera uno de sus puntos, por ejemplo $(0, 1)$, y la matriz de la simetría respecto de su recta paralela que pasa por el origen $(x - y = 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la simetría son:

$$S_r(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = y-1 \\ y' = x+1 \end{array} \right.$$

4. Para hallar las ecuaciones de la simetría deslizante respecto de la recta $r \equiv y - x = 1$ con vector $\mathbf{v} = (3,3)$ se halla la matriz de la simetría respecto de su recta paralela que pasa por el origen $(x - y = 0)$, que es la misma matriz A del ejemplo anterior, y un punto de la recta, por ejemplo $(0,1)$. Las ecuaciones de la simetría deslizante son:

$$SD_{r,\mathbf{v}}(x,y) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} x' = y+2 \\ y' = x+4 \end{array} \right.$$

8.6 Movimientos en $\mathbb{R}^3$

1. **Traslación de vector $\mathbf{v}$**:

$$T_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

No tiene puntos fijos, salvo en el caso trivial de que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (en este caso el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos).

2. **Giro de ángulo α y eje la recta $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$**: Se puede obtener como la composición de una traslación de vector $-\mathbf{u}_0$ (que hace pasar el eje de giro por el origen), con un giro de eje $L(\{\mathbf{u}_1\})$ y ángulo α, y con una traslación de vector $\mathbf{u}_0$ (que devuelve el eje de giro a su posición inicial). Por lo tanto:

$$G_{r,\alpha}(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde A es la matriz del giro de ángulo α y eje $L(\{\mathbf{u}_1\})$. Los únicos puntos fijos son los del eje de giro, salvo en el caso trivial de que $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$ (en estos casos el movimiento es la identidad y todos los puntos son fijos). Si $\alpha = \pi$, el giro se suele llamar **simetría axial** de eje r.

3. **Movimiento helicoidal de ángulo α, eje $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$ y vector de traslación $\mathbf{v} \parallel r$**: Es la composición de un giro de ángulo α y eje $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1\})$ con una traslación de vector $\mathbf{v}$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$MH_{r,\alpha,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ G_{r,\alpha}(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde A es la matriz del giro de ángulo α y eje $L(\{\mathbf{u}_1\})$. En general, no hay puntos fijos.

4. **Simetría respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$**: Se puede obtener como la composición de una traslación de vector $-\mathbf{u}_0$ (que hace pasar al plano de simetría por el origen), con una simetría respecto del plano $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$, y con una traslación de vector $\mathbf{u}_0$ (que devuelve el plano de simetría a su posición inicial). Por lo tanto:

$$S_\pi(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde A es la matriz de la simetría respecto del plano $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$. Todos los puntos del plano π son puntos fijos.

5. **Simetría deslizante respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ con vector $\mathbf{v} \parallel \pi$**: Es la composición de una simetría respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ con una traslación de vector $\mathbf{v}$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$SD_{\pi,\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = T_{\mathbf{v}} \circ S_\pi(\mathbf{u}) = [A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0] + \mathbf{v} = A\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde A es la matriz de la simetría respecto del plano $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$. No hay puntos fijos, salvo en el caso en que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (el movimiento es una simetría sin deslizamiento y los puntos fijos son los del plano π).

6. **Simetría rotacional**: Es la composición de una simetría respecto del plano $\pi \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ con un giro de ángulo α y eje la recta $r \equiv \mathbf{u}_0 + L(\{\mathbf{u}_3\})$ perpendicular a π ($r \cap \pi = \{\mathbf{u}_0\}$). Su ecuación es:

$$SR(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 - A\mathbf{u}_0)$$

donde A es la matriz de la composición de una simetría respecto del plano $L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})$ con un giro de ángulo α y eje $L(\{\mathbf{u}_3\})$. El único punto fijo es el punto $\mathbf{u}_0$ de intersección de la recta y el plano, salvo en el caso de que $\alpha = 0$ o $\alpha = 2\pi$ en que la simetría rotacional se reduce a la simetría respecto del plano π. En el caso particular $\alpha = \pi$ la simetría rotacional se llama **simetría central** y su ecuación es:

$$SC(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathbf{u}_0 = -\mathbf{u} + 2\mathbf{u}_0$$

8.7 Ejemplos

1. Para hallar la ecuación de un giro de ángulo $\alpha = \pi/2$ y de eje la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$, hay que comenzar hallando la matriz del giro del mismo ángulo y eje la recta $y = z = 0$, que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y puesto que $(0, 1, 2) \in r$, la ecuación del giro es:

$$G_{r,\alpha}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3-z \\ y+1 \end{pmatrix}$$

2. La simetría axial respecto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$ es el giro con eje en la misma recta y ángulo $\alpha = \pi$. Como en el ejemplo anterior, su ecuación es:

$$\begin{aligned} G_{r,\pi}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2-y \\ 4-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Para hallar la ecuación del movimiento helicoidal de eje $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$, ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y vector $\mathbf{v} = (2,0,0)$, se halla la matriz del giro del mismo ángulo y eje la recta $y = z = 0$, que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y puesto que $(0,1,2) \in r$, la ecuación del movimiento helicoidal es:

$$MH_{r,\alpha,\mathbf{v}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 3-z \\ y+1 \end{pmatrix}$$

4. Para hallar la ecuación de la simetría respecto del plano $\pi \equiv y - z = 1$, hay que hallar la matriz de la simetría respecto del plano $y - z = 0$, que es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, puesto que $(0,1,0) \in \pi$, la ecuación de la simetría es:

$$S_\pi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

5. La simetría deslizante respecto del plano $\pi \equiv y - z = 1$ con vector de deslizamiento $\mathbf{v} = (1,2,2)$, es la composición de la simetría respecto del plano π (la del ejemplo anterior) con la traslación de vector $\mathbf{v}$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$SD_{\pi,\mathbf{v}}(x,y,z) = T_{\mathbf{v}} \circ S_\pi(x,y,z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ z+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

6. La simetría rotacional de eje $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$, ángulo $\alpha = \pi/2$ y plano $\pi \equiv x = -1$ tiene por matriz la asociada a la composición de una simetría respecto del plano $x = 0 \equiv L(\{\mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\})$ con un giro de ángulo $\pi/2$ y eje la recta $y = z = 0 \equiv L(\{\mathbf{e}_1 = (1,0,0)\})$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que $r \cap \pi = (-1,1,2)$, la ecuación de la simetría rotacional es

$$SR(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ -z+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

7. La ecuación de la simetría central respecto del punto $Q(-1,1,2)$ es

$$SC(x,y,z) = -\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ -y+2 \\ -z+4 \end{pmatrix}$$

8.8 Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^2$

Sea $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}+\mathbf{b}$, $A^tA = I$, un movimiento, y sea $S(1) = \text{Ker}(A-I)$ el subespacio de vectores invariantes de A. Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $\dim S(1) = 2$, entonces $A = I$ y el movimiento es una traslación de vector $\mathbf{b}$.
2. Si $\dim S(1) = 1$, la aplicación ortogonal asociada a la matriz A es una simetría, y se pueden presentar dos casos:
   (a) Hay puntos fijos: el movimiento es una simetría respecto de la recta $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$.
   (b) No hay puntos fijos: el movimiento es una simetría deslizante con vector $\mathbf{v}$ que ha de verificar:
   $$f(f(\mathbf{0})) = f^2(\mathbf{0}) = 2\mathbf{v} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$$
   y recta de simetría $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$.
3. Si $\dim S(1) = 0$, el movimiento es un giro de centro el único punto fijo $\mathbf{c}$, es decir tal que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, y ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)}{2}$.

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

$\dim \mathbf{S(1)}$	**Puntos fijos**	**Movimiento:** $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}+\mathbf{b}$
2		Traslación de vector $\mathbf{b}$
1	Si	Simetría respecto de la recta $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$
1	No	Simetría deslizante de vector $\mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$ y eje la recta $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$
0		Giro de centro el vector $\mathbf{c}$, tal que $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, y ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)}{2}$

8.9 Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^3$

Sea $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}+\mathbf{b}$, $A^tA = I$, un movimiento, y sea $S(1) = \text{Ker}(A-I)$ el subespacio de vectores invariantes de A. Se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $\dim S(1) = 3$, entonces $A = I$ y el movimiento es una traslación de vector $\mathbf{b}$.
2. Si $\dim S(1) = 2$, la aplicación ortogonal asociada a la matriz A es una simetría, y se pueden presentar dos casos:
   (a) Hay puntos fijos: el movimiento es una simetría respecto del plano $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$.
   (b) No hay puntos fijos: el movimiento es una simetría deslizante con vector $\mathbf{v}$ que ha de verificar:
   $$f(f(\mathbf{0})) = f^2(\mathbf{0}) = 2\mathbf{v} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{2}f^2(\mathbf{0})$$
   y plano de simetría $\pi \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}+\mathbf{v}\}$.

3. Si $\dim S(1) = 1$, la aplicación ortogonal asociada a la matriz A es un giro, y se pueden presentar dos casos:

   (a) Hay puntos fijos: el movimiento es un giro respecto de la recta $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$ y ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)-1}{2}$.

   (b) No hay puntos fijos: el movimiento es un movimiento helicoidal con eje la recta $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in S(1)\}$, ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)-1}{2}$, y vector de deslizamiento $\mathbf{v} = f(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0$, con $\mathbf{v}_0 \in r$.

4. Si $\dim S(1) = 0$, se pueden presentar dos casos:

   (a) Si $\dim S(-1) = 3$, entonces $A = -I$ y el movimiento es una simetría central con centro en su único punto fijo $\mathbf{c}$ ($f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$).

   (b) Si $\dim S(-1) = 1$, el movimiento es una simetría rotacional. Si $\mathbf{c}$ es su punto fijo ($f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$), el eje de giro es $\mathbf{c} + S(-1)$, el plano de simetría es $\mathbf{c} + S(-1)^{\perp}$, y el ángulo de giro $\alpha = \arccos \frac{traza(A)+1}{2}$.

En resumen, se tiene la siguiente clasificación:

$\mathbf{dim\,S(1)}$		**Movimiento:** $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b}$
3		Traslación de vector $\mathbf{b}$
2	Hay puntos fijos	Simetría respecto del plano $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$
2	No hay puntos fijos	Simetría deslizante de vector $\mathbf{v} = \frac{1}{2} f^2(\mathbf{0})$ respecto del plano $\pi \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$
1	Hay puntos fijos	Giro respecto de la recta $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$, y ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)-1}{2}$
1	No hay puntos fijos	Movimiento helicoidal de eje $r \equiv \{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \in S(1)\}$, ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)-1}{2}$, y vector de deslizamiento $\mathbf{v} = f(\mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0$, con $\mathbf{v}_0 \in r$
0	$\dim S(-1) = 3$	Simetría central respecto de $\mathbf{c}$, con $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$
0	$\dim S(-1) = 1$	Simetría rotacional de eje $\mathbf{v}_0 + S(-1)$ y plano $\mathbf{v}_0 + S(-1)^{\perp}$,con $f(\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_0$, y ángulo $\alpha = \arccos \frac{traza(A)+1}{2}$