VECTORES EN EL PLANO

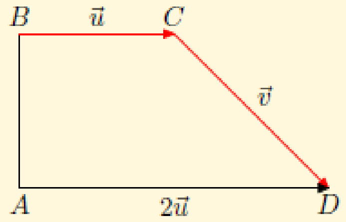
Ejercicio 1. Dados dos vectores no dependientes $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ hallar $-2\cdot\vec{\mathbf{u}}-2\cdot\vec{\mathbf{v}}$

Ejercicio 2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{BC}=\vec{u}$ y $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}$

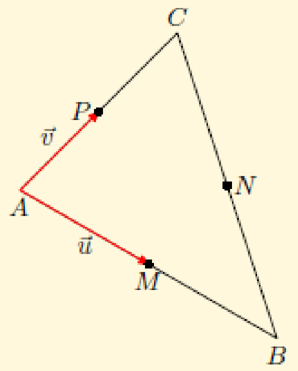


Ejercicio 3. Siendo M, N, P los puntos medios de los lados, expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}=\vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{MB}$ *b*) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BC}$ *d*) $\overrightarrow{AN}$

e) $\overrightarrow{PM}$ *f*) $\overrightarrow{MC}$



Ejercicio 4. Expresar el vector $\vec{\mathbf{w}}(5,2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(3,-2)$. Efectuar una representación gráfica.

Ejercicio 5. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,-2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(2,3)$, hallar $\vec{\mathbf{v}}$ con

$$\vec{\mathbf{w}}=2\cdot\vec{\mathbf{u}}+3\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

Ejercicio 6. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$ y $\vec{\mathbf{w}}(-1,1)$. Comprobar que forman una base.

Ejercicio 7. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,a)$ y $\vec{\mathbf{w}}(1,1)$. Hallar los valores de a para que formen una base.

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(6,-1)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m,2)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

Ejercicio 9. Hallar todos los vectores $\vec{\mathbf{w}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{u}}(u_1,u_2)$ y con el mismo módulo.

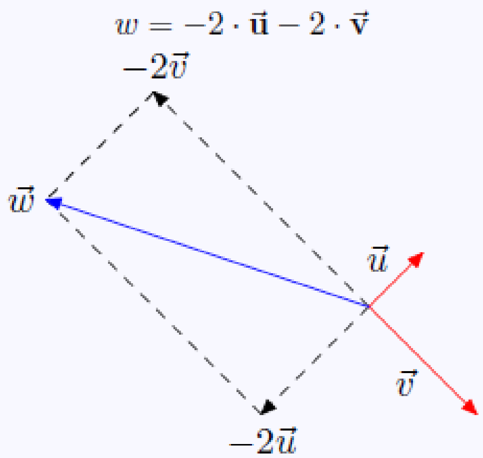
Ejercicio 10. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4,6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5,m)$. Hallar m para que:

a) Sean dependientes

b) Sean perpendiculares

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

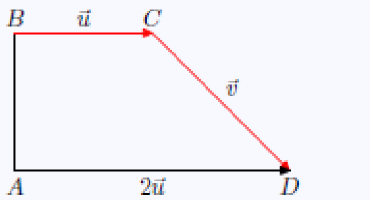


Ejercicio 2.

a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$



Ejercicio 3.

a) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} = \vec{u}$

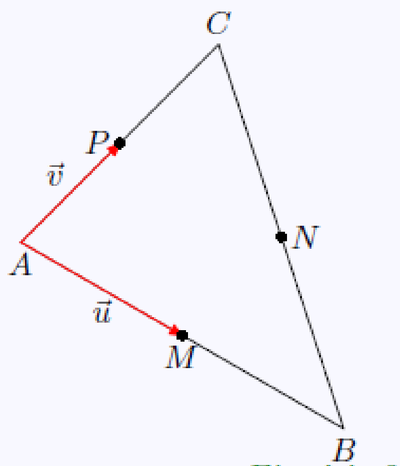
b) $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM} = 2\,\vec{u}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$

d) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{v}$

e) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \vec{u} - \vec{v}$

f) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + 2\,\vec{v}$

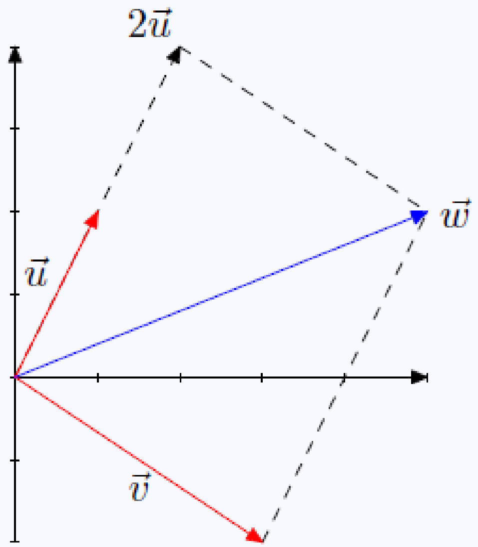


Ejercicio 4. Buscamos escalares α y β con

$$\vec{\mathbf{w}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}} + \beta \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 & = & 1\,\alpha + 3\,\beta \\ 2 & = & 2\,\alpha - 2\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = 1}$$



Ejercicio 5. Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 & = & 2\,(1) + 3\,v_1 \\ 3 & = & 2\,(-2) + 3\,v_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{v_1 = 0 \quad v_2 = \frac{7}{3}}$$

Ejercicio 6. Basta comprobar que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$ y $\vec{\mathbf{w}}(-1,1)$ son linealmente independientes. Como las componentes no son proporcionales:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \Longrightarrow \text{ son independientes}$$

Ejercicio 7. Basta exigir que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,a)$ y $\vec{\mathbf{w}}(1,1)$ sean linealmente independientes., es decir que las componentes no sean proporcionales. Como

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{1} \Longrightarrow a = 2$$

Si $a = 2$ son dependientes y no forman base. Para cualquier valor $a \neq 2$ son independientes y forman una base.

Ejercicio 8.

1. $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
   $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$
2. El producto escalar
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3)\,(6, -1) = 2\,.\,6 + 3\,.\,1 = 15$$
3. Como $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,cos\alpha$, tenemos,
$$\cos\,\alpha = \frac{15}{\sqrt{13}\,\sqrt{37}}$$
4. $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ si $\vec{w}\,.\,\vec{u} = 0$, luego,
$$(m, 2)\,.\,(2, -3) = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Ejercicio 9. Los vectores $\vec{\mathbf{w}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo, son
$$\vec{\mathbf{w}}(-u_2, u_1) \qquad \vec{\mathbf{w}}(u_2, -u_1)$$

Ejercicio 10.

a) los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4, 6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5, m)$ son dependientes si
$$\frac{-4}{5} = \frac{6}{m} \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{15}{2}}$$

b) los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4, 6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5, m)$ son perpendiculares si
$$(-4, 6) \cdot (5, m) = 0 \Longrightarrow -20 + 6m = 0 \Longrightarrow \boxed{m = \frac{10}{3}}$$

VECTORES EN EL ESPACIO

Ejercicio 1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$ y $\vec{v} = (6, -1, 0)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m, 2, 3)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

Ejercicio 2. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que,

$$||\vec{u}|| = 9 \qquad (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 17$$

calcular la norma del vector $\vec{v}$.

b) ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores del espacio sea cero, sin que ninguno de ellos sea el vector nulo?

c) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$ determina el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$.

d) Si la norma del vector $||\vec{u}|| = 2$, ¿cuál es la norma del vector $3\,\vec{u}$?

e) A partir del vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$, encuentra un vector unitario con la misma dirección de $\vec{u}$.

Ejercicio 3. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Siendo $u(1, 2, 1)$ y $v(1, 0, 2)$, comprobar que el producto vectorial de

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

b) ¿Cúal es el producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes?

c) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $||\vec{u}|| = 5$ y $||\vec{v}|| = 2$, y además $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calcula $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

1. $||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ y

$$||\vec{v}|| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{37}$$

2. El producto escalar

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (2, -3, 5)\,(6, -1, 0) = 2\,.\,6 + 3\,.\,1 + 5\,.\,0 = 15$$

3. Como $\vec{u}\,.\,\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,cos\alpha$, tenemos,

$$\cos\,\alpha = \frac{15}{\sqrt{38}\,\sqrt{37}}$$

4. $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ si $\vec{w}\,.\,\vec{u} = 0$, luego,

$$(m, 2, 3)\,.\,(2, -3, 5) = 0 \Rightarrow 2m + 9 = 0 \Rightarrow m = -9/2$$

Ejercicio 2.

a) Como

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,\vec{u} - \vec{v}\,\vec{v} = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 17$$

y $||\vec{u}|| = 9 \Rightarrow 81 - ||\vec{v}||^2 = 17 \Rightarrow ||\vec{v}||^2 = 64 \Rightarrow ||\vec{v}|| = 8$.

b) Si. Por ejemplo $\vec{u} = (1,0,0)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$.

c)

$$\vec{u}+\vec{v} = (5,7,9) \qquad ||(5,7,9)|| = \sqrt{5^2+7^2+9^2} = \sqrt{155}$$
$$\vec{v}-\vec{u} = (3,3,3) \qquad ||(3,3,3)|| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\cdot\sqrt{3}$$

d) Si $||\vec{u}|| = 2$, $||3\,\vec{u}|| = 3\,||\vec{u}|| = 6$.

e) Para convertir un vector en unitario se divide por su norma, así

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

luego el vector

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

es unitario.

Ejercicio 3.

a) El producto vectorial:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,-1,-2)$$

y

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = (-4,1,2)$$

b) Sean dos vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ linealmente dependientes, luego $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$. El producto vectorial:

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

La respuesta es el vector nulo.

c) Como $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot \text{sen}\ \alpha$. Necesitamos hallar sen α a partir del dato $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10$. Ya que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\,\alpha$$

$$10 = 5\cdot 2\cdot\cos\,\alpha \qquad \cos\,\alpha = 1$$

Como $\text{sen}\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = 0$, se tiene

$$||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = 0 \quad \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = (0,0,0)$$