El sorprendente número π

Jesús Antonio Temprano Marañón

Parece increíble que algo aparentemento tan sencillo como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro haya preocupado al hombre desde la más remota antigüedad hasta el presente más actual.

A unos, por que han querido aprender sus cifras de memoria y, a otros, por que han querido conocer todas sus cifras con exactitud, lo cierto es que siempre el número pi ha estado presente en el pensamiento de la especie humana.

Ya el pueblo judío conocía diversos valores del número pi, puesto que ya en la Biblia, cuando en el libro de los Reyes (1 Reyes, 7, 23) y en el libro de las Crónicas (2 crónicas, 4,4) se habla de la primera construcción del Templo y de la Casa de Salomón, alrededor del siglo X o XI a.C., se utilizaba el valor:

$$\pi = 3$$

ya que en ambos libros se decía:

"*Hizo el mar fundido de diez codos* (el codo era una medida de longitud de aproximadamente medio metro) *de borde a borde y un cordón de treinta codos medía su contorno*"

$$\pi = \frac{1}{d} = \frac{30}{10} = 3$$

No obstante, recientes investigaciones sobre los textos hebreos ofrecen evidencias de que conocían el valor de 3,1416 aunque la validez de esta interpretación no está todavía universalmente aceptada.

La civilización mesopotámica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en un periodo que comienza hacia unos 5.000 años a.C. y llega hasta los albores del cristianismo. Dado que actualmente se han recogido casi medio millón de tablillas escritas en forma cuneiforme es difícil encuadrarlas exactamente, pero, parece posible suponer que fue en la ciudad de Babilonia, centro cultural del "Creciente fértil" entre los años 2.000 y 550 a.C. donde se hicieron los descubrimientos más importantes.

Al estudiar dichas tablillas, se han encontrado para pi los siguientes valores:

- Al calcular el área del círculo mediante la fórmula

  $$A = C^2/12$$

  siendo C la longitud de la circunferencia da el valor π - 3
- Al resolver algunos problemas relativos a hexágonos inscritos se ha encontrado el valor:

  $$\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$$

- Al resolver otros problemas, empleaban la relación existente entre el perímetro de un hexágono regular y su circunferencia circunscrita, que según ellos era:

  $$p = \frac{24}{26}\, l \quad \text{(figura 1)}$$

siendo "p" el perímetro del hexágono y "l" la longitud de la circunferencia, con lo cual, considerando que el radio de la circunferencia y el

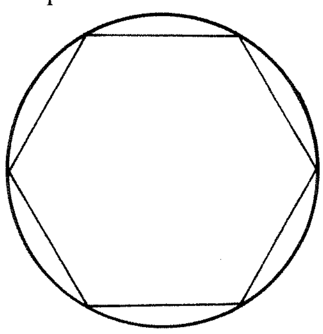

Figura 1

lado del hexágono regular inscrito en la misma son iguales, resulta:

$$\frac{24}{26}\cdot 2\pi r = 6r \Rightarrow \pi = \frac{6,26}{2,24} = 3,25$$

La civilización egipcia abarca una época que comienza en el año 3.100 a.C. y termina en el 322 a.C. con la conquista griega de Alejandría y lo que sabemos de ella está escrito en los numerosos papiros encontrados en sus monumentos y, fundamentalmente en lo que se refiere al número pi, en el papiro de Rhind (1.650 a.C.). En dicho papiro se ve que los egipcios pensaban que el área del circulo era la misma que la de un cuadrado que tuviese por lado los 8/9 del diámetro del círculo (fig. 2)

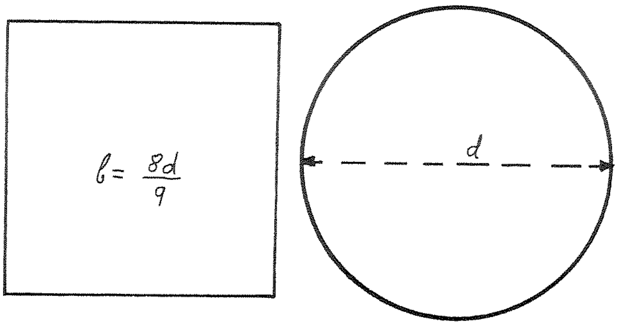

Figura 2

$$A_{ci} = A_{cu} \Rightarrow \pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \Rightarrow \pi\cdot\frac{d^2}{4} = \frac{64d^2}{81}$$

$$\pi = \frac{64,4}{81} = 3,16049$$

No obstante, al estudiar en profundidad las pirámides, se ha visto que los egipcios conocían el valor de pi con bastante aproximación (fig. 3)

600/191 = 3,14136...	443/141 = 3,14184...
110/35 = 3,14285...	1.043/332 = 3,14156...
333/106 = 3,141504...	377/120 = 3,14166...
267/85 = 3,141176...	166,5/53 = 3,141504...

pero, y fundamentalmente conocían el valor

$$710/226 = 3,141592...$$

que daba seis cifras decimales exactas, con lo que adelantaban en varios siglos al valor dado por un astrónomo chino, al que se supuso durante mucho tiempo el descubridor de este valor.

Los arquitectos fenicios y griegos empleaban el valor:

$$\pi = 22/7 = 3,14285$$

pero los matemáticos griegos no se conformaron con este valor aproximado y fue el genial Arquímedes el que consiguió un valor mas exacto.

Arquímedes fue entre otras cosas, un gran matemático que murió en el año 212 a.C. cuando los romanos conquistaron Siracusa, ciudad a la que el había defendido durante años ingeniosamente con espejos, poleas, etc., causando grandes pérdidas en tiempo y hombres entre ellos.

Su idea para calcular el valor de pi fue la siguiente: primeramente inscribió un hexágono regular en una circunferencia de diámetro unidad, con lo cual su perímetro tiene que ser menor que la longitud de la circunferencia, es decir, menor que pi. A continuación dividió en dos partes cada uno de los arcos anteriores obteniendo un polígono de doce lados del que halló su perímetro. Continuó con este procedimiento inscribiendo polígonos de 24, 48 y 96 lados y, obtuvo para el perímetro de este último, el valor de:

$$p = 3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71}$$

que todavía debe ser menor que pi puesto que queda hueco entre este polígono y la circunferencia. Des-

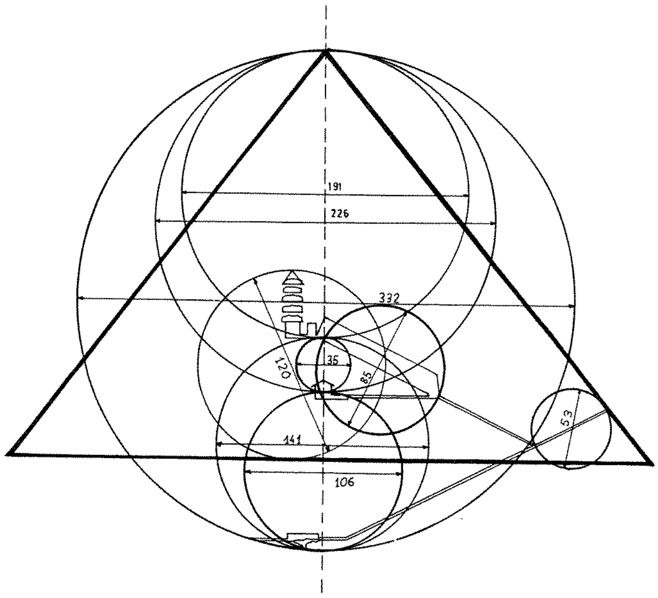

Figura 3

pués hizo lo mismo, pero circunscribiendo polígonos de los mismos lados a la circunferencia y, obtuvo para el de 96 lados un perímetro:

$$p = 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$$

con lo cual, haciendo el promedio de los dos valores, obtuvo:

$$\pi = \frac{\frac{22}{7} + \frac{223}{71}}{2} = \frac{\frac{1562}{497}}{2} = \frac{3123}{994} = 3{,}14185$$

Ptolomeo dividió el círculo en 360° y el diámetro en 120 partes, y luego cada parte en minutos, segundos y décimas de segundo, según el sistema sexagesimal de los babilonios y admitía que la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro era 3 8' 30'', es decir:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}14285$$

Herón de Alejandría que vivió posiblemente entre los años 75 y 150 d.C. y que es conocido por la famosa fórmula del área del triángulo en función de su semiperímetro, aunque hoy sabemos que procede de Arquímedes, también utilizaba el valor:

$$\pi = 22/7 = 3{,}14285$$

En uno de los mas antiguos libros chinos, "*El arte matemático en nueve secciones*", posiblemente bastante anterior al año 213 a.C. en el que un emperador mandó quemar todos los libros, aparece para pi el valor 3.

En el siglo III d.C., Liu Hui, considerando un polígono de 172 lados encontró:

$$\pi = 3{,}14159$$

El astrónomo chino Tsu Chúng-Chih (430-501 d.C.) y su hijo consiguieron dar el valor:

$$\pi = 3{,}1415927$$

como límite superior y:

$$\pi = 3{,}1415926$$

como límite inferior. Además escribieron los tres primeros números impares repitiéndolos dos veces cada uno:

1 1 3 3 5 5

y colocando los tres últimos sobre los tres primeros, obtuvieron:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}14159$$

que es la mejor manera de expresar el número pi en forma de fracción. Estos resultados no fueron mejorados hasta cientos de años después.

En la civilización india también existen estudiosos del número pi, entre los que podemos destacar los siguientes:

- Baudhayana pensaba que su valor era:

$$\pi = \frac{49}{16} = 3{,}0625$$

- Este verso de Aryabhata, matemático indio del siglo IV, nos da el valor aproximado de la relación que más adelante se denominará pi: "*Sumar cuatro a cien, multiplicar por ocho, sumar todavía sesenta y dos mil y se obtiene así un valor aproximado de la circunferencia de un círculo cuyo valor aproximado es de dos miríadas*".

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

En su trigonometría también se encuentra el valor:

$$\pi = \sqrt{10}$$

- Bramhagupta, en el siglo VI, en su libro de astronomía consideraba:

$$\pi = 3$$

como valor práctico, y:

$$\pi = \sqrt{10}$$

como valor preciso.

- En el siglo XII, Bhaskara o, Bhaskafa según otros autores, manejaba los siguientes valores:

$$\pi = 754/240 = 3{,}14167$$
$$\pi = 3927/1250 = 3{,}1416$$

En Europa, no obstante, se siguieron utilizando los valores dados por Leonardo, que obtuvo:

$$\pi = 2880/917 = 3{,}14067$$

por el Cardenal Cusa, que por medio de construcciones poligonales obtuvo:

$$\pi = 3{,}142337...$$

y

$$\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3{,}13615$$

y, el valor de origen desconocido:

$$\pi = \sqrt[3]{31} = 3{,}14138$$

hasta que en el siglo XVI, se conoció el valor dado por el astrónomo chino que, como ya sabemos, nos da hasta la sexta cifra decimal exacta.

Al ir conociendo todos estos datos, los sabios y hombres de ciencia de la época se empeñaron en conocer el valor de pi exactamente. Para ello trataron de resolver el famoso problema de la cuadratura del círculo, es decir, construir con regla y compás un cuadrado que tuviera exactamente el mismo área que un círculo dado y, como esto no es posible, según se demostró posteriormente, se abandonó el método tradicional y se recurrió al de obtener una serie de fracciones que tendiera hacia pi.

Con este método, el llamado padre del álgebra, el francés Viete, partiendo de la expresión del perímetro γ" de un polígono regular de 2n - 1 lados y, utilizando de manera recurrente la expresión del seno del ángulo doble, en función del seno y coseno del arco, llegó después de n - 2 transformaciones a:

$$\frac{4}{p} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

que, al pasar del polígono a la circunferencia, resulta la expresión límite:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cdots$$

con lo que obtuvo para pi el siguiente valor:

$$\pi = 3{,}14159265358979323$$

En 1.596, el alemán Ludolph von Ceulen, poco convencido de los nuevos métodos, volvió al método tradicional de Arquímedes y utilizó un polígono de 1.073.741.284 lados, con lo que obtuvo pi con 35 cifras decimales, por lo que también se le conoce como el número de Ludolph, y que permitía calcular el volumen de una esfera de la magnitud de la Tierra aproximadamente con una exactitud de tres mil millonésimas de centímetro.

Un poco mas tarde, el inglés Jhon Wallis (1.616-1.703) al aplicar su regla a la expresión entera:

$$\left(1 - x^2\right)^n$$

para valores sucesivos de n trató de obtener por interpolación, el valor de n = 1/2, al que correspondería como resultado π/4. Como no logró éxito, fue modificando los valores del exponente n", al mismo tiempo que modificaba los de la potencia de x, y siguiendo ciertas leyes de generalización e interpolación llegó a un nuevo desarrollo en producto infinito de la forma:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot ... =$$

$$= 2\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot ... \cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Como Wallis no quedó muy contento con esta fórmula instó a su amigo William Brouncker, que no se sabe como, obtuvo un desarrollo de pi en fracción continua infinita que por incomodidad tipográfica omitimos aquí.

En 1.671, el matemático escocés James Gregory obtuvo la serie del arco tangente como:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

aprovechándose de lo cual, en 1.673, el filósofo y matemático alemán Gottfried von Leibnitz, cofundador del cálculo con Isaac Newton, obtuvo los actuales desarrollos en serie del arco tangente circular y del arco tangente hiperbólico mediante el cálculo de los sectores elíptico e hiperbólico, que en el primer caso, haciendo x=1, da lugar a una fórmula muy sencilla y conocida:

$$\pi = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

con el inconveniente de que se necesitan veinte mil términos para obtener cuatro decimales exactos. También obtuvo la serie más precisa:

$$\pi = \frac{8}{1 \cdot 3} + \frac{8}{5 \cdot 7} + \frac{8}{9 \cdot 11} + \frac{8}{13 \cdot 15} + \dots$$

En 1.717, el matemático inglés Abraham Sharp calculó pi con 71 decimales.

Jhon Machin, profesor de astronomía en Londres, también a comienzos de este siglo obtuvo la fórmula:

$$\pi = 16 \cdot \text{arctang}\,\frac{1}{5} - 4 \cdot \text{arctang}\,\frac{1}{239}$$

con la que consiguió los cien primeros decimales de pi, ya que ambas series convergen rápidamente.

En este mismo siglo, Leonhard Euler generalizó la fórmula de Machin y dio numerosos desarrollos en serie del número pi mediante la serie del arco tangente. Además de obtener un notable impacto, popularizó en 1.736 el uso de la letra griega π, para nuestro número. Esta aceptación ocurrió 30 años mas tarde cuando el autor inglés William Jones introdujo este símbolo en nuestra escritura.

En 1.761, el alsaciano Johan Heinrich Lambert demostró la irracionalidad de pi, es decir, que tiene infinitos decimales, mediante el desarrollo en fracción continua cde tangente de ¯".

En 1.794, Legendre, en su libro "Elementos de Geometría", volvió a demostrar la irracionalidad de pi con la profética observación de que es probable que el número pi no esté comprendido entre los irracionales algebraicos, es decir, que no sea raiz de una ecuación algebraica de un número finito de términos y de coeficientes racionales.

No obstante, el interés por nuestro número no decayó ya que George von Vega calculó 140 decimales, J. M. Zacharias 200, Richter 500, pero fue el matemático inglés William Shanks, empleando la fórmula de Machin el que en 1.873, y después de 20 años de trabajo, obtuvo el valor de pi con 707 decimales, aunque para su desgracia cometió un error en la cifra 528 afectando por ello a todas las siguientes. A pesar de ello, y como homenaje al más grande calculador humano de pi, sus 707 cifras decimales se hallan grabadas a lo largo del friso circular en que se apoya la cúpula del palacio Decouverte de París.

En 1884, Ferdinand Lindemann demostró que el número pi era trascendente. Esta demostración implicaba la solución del problema de la cuadratura del círculo. En efecto pueden construirse con regla y compás los segmentos cuya medida se expresa algebraicamente mediante un número finito de operaciones racionales y de raices cuadradas a partir de la medida de segmentos dados o, lo que es lo mismo, pueden construirse aquellos cuyas medidas son raices de ecuaciones algebraicas o reducibles a cuadráticas, de coeficientes racionales o irracionales cuadráticos, es decir, de determinados tipos de números algebraicos. Ahora bien, la ecuación que traduce el problema de la construcción con regla y compás de un segmento de un lado de un cuadrado equivalente a un círculo de radio dado, es:

$$x^2 = \pi$$

ecuación cuadrática, uno de cuyos coeficientes no es algebraico.

Como anécdota, cabe destacar que el problema de la cuadratura del círculo, imposible en la geometría euclidiana, tiene solución en la geometría de tipo hiperbólico.

El inglés, D. F. Ferguson empleando una expresión diferente de la del algoritmo de Machin fue el que descubrió el error de Shanks y, ayudado por una calculadora obtuvo 808 decimales en 1.945.

Ya en 1.949. George W. Reitwiesher, con una computadora Eniac (Electronic Numerical Integrator and Computer) y durante más de 70 horas de trabajo calculó pi con 2.037 cifras decimales.

En 1.955, una computadora más veloz obtuvo pi con 10.017 decimales trabajando durante 33 horas.

En 1.961, Shanks y Wench, con un IBM 7030, obtuvieron pi con 100.625 decimales.

En 1.974, el francés Jean Guilloud calculó un millón de cifras decimales con la computadora más poderosa del mundo en esa época, una Control Data 7600, en 23 horas y 18 minutos. Un poco más tarde, se obtuvieron los primeros 10 millones de decimales, en donde, para hacernos una idea:

el 0 se repite 9994440 veces,
el 1, 999333 veces,
el 2, 1000306 veces,
el 3, 999964 veces,
el 4, 1001093 veces,
el 5, 1001093 veces,
el 6, 999337 veces,

el 7, 1000207 veces,
el 8, 999814 veces, y,
el 9, 1000040 veces.

En 1983, los japoneses Kanada, Tamura, Yoshiro y Ushiro utilizando un algorítmo basado en la gran velocidad de convergencia de las secuencias correspondientes a la media aritmetico-geométrica de dos números y conocido como algorítmo de Brent-Salamin, obtuvieron 16 millones de decimales.

Dos o tres años después, el ordenador Cray-2 de la Nasa, tras 28 horas de trabajo obtuvo 29.360.128 decimales. En 1989, el profesor asistente de informática de la Universidad de Tokyo, Yasumasa Kaneda, ha resultado ganador de una competición en la que participaban norteamericanos y japoneses, para calcular la relación exacta entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, al obtener 536.870.000 decimales del número pi, gracias a 67 horas y 13 minutos de trabajo de un ordenador perfeccionado y a 100.000 hojas de papel.

Gregory y David Chudnovsky han superado a Kanada en 1990, obteniendo 1.000 millones de decimales utilizando un nuevo algorítmo iterativo que combina técnicas de convolución rápida, de multiplicación de enteros largos y de evaluación de series de potencias, utilizando dos ordenadores, un Cray-2 del Minesotta Supercomputer Center y un IBM 3090-UF del centro de investigación T.J. Waston de Nueva York, lo que constituye el record mundial hasta ahora.

Pero, si normalmente con tres o cuatro decimales nos basta, ¿a qué se debe el empecinamiento de matemáticos y no matemáticos en encontrar el número pi cada vez con más decimales?.

Por una parte, este empeño ha dado lugar a grandes descubrimientos matemáticos (métodos de aproximación a integrales definidas, evaluación de funciones trascendentes, etc.) y por otra, el intentar buscar un record siempre ha sido un reto para la especie humana.

No obstante, si algún curioso quiere saber las 20 primeras cifras, no tiene más que acudir a los versos de Manuel Golmayo:

"Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros."

o las 32 primeras cifras y acudir a los siguientes versos del ingeniero colombiano R. Nieto París:

"Soy ø, lema y razón ingeniosa
de hombre sabio, que serie preciosa
valorando, enunció magistral.
Por su ley singular, bien medido
el grande orbe por fin reducido
fue al sistema ordinario usual."

y cambiar cada palabra por el número de letras que la forma, con lo que obtendrá el siguiente valor:

$$\pi = 3,\ 14159265358979323846264338327 95.$$

Aunque tampoco quedaría muy bien, ya que el doctor A.C. Aitken, profesor de Matemáticas de la Universidad de Edimburgo se aprendió las 802 primeras cifras en aproximadamente 15 segundos, ó el japonés Hidaki Tomoyori, que en 1.979 y durante 3 horas y 10 minutos recitó de memoria las 15.151 primeras cifras decimales de pi, procediendo de la siguiente manera: plegaba un dedo de la mano derecha cada 100 cifras, uno de la mano izquierda cada 10 cifras para acordarse donde estaba, y se paraba cada 1.000 cifras para descansar. Poco después de acabar declaró que pensaba memorizar 100.000 cifras, aunque esto creemos que todavía no lo ha conseguido.

Mucho menos trabajoso es, desde luego, utilizar las fórmulas rápidas de Stormer

$$\pi = 24 \cdot \arctan \frac{1}{8} + 8 \cdot \arctan \frac{1}{57} + 20 \cdot \arctan \frac{1}{239}$$

y de Gauss

$$\pi = 48 \cdot \arctan \frac{1}{18} + 32 \cdot \arctan \frac{1}{57} + 20 \cdot \arctan \frac{1}{239}$$

y obtener los primeros 100.000 decimales de pi mediante el programa publicado en la revista "El Ordenador Personal", en el número 36, por el club Ademir.