

ANÁLISIS FUNCIONAL GRÁFICO-CUALITATIVO

Tomás Ortega

ortega@am.uva.es

1. INTRODUCCIÓN

El carter de los automóviles es una caja metálica estanca en la que están fijados los cilindros, los palieres y el cigüeñal. En él se aloja el aceite de engrase de estos elementos. La capacidad del carter de un automovil medio es de unos 5 litros, pero las formas son muy variadas. Así al llenarlo de aceite, en unos modelos, el nivel de este líquido es proporcional al volumen de aceite que es introducido en el carter; en otros, al principio del llenado el nivel sube muy rápido, pero después es más lento (la parte superior del carter tiene mayor capacidad porque tiene un “abombamiento”); en otros la parte superior del carter tiene menor capacidad (el abombamiento esta en la parte superior); incluso puede ocurrir que la mayor capacidad en relación con la altura esté hacia la mitad o en los extremos. El objetivo de este capítulo consiste en hacer un análisis funcional gráfico cualitativo: aprender a construir gráficas analizando el comportamiento funcional que describiría un fenómeno dado de forma verbal y, por el contrario, analizar las características de cierto fenómeno a partir de la gráfica que lo representa.

A continuación se presentan nueve secciones frontales de vasijas (figuras 1, 2 y 3), cuyo fondo es tal que en cada caso resulta un volumen de 5 litros. Se tiene que hacer la gráfica cartesiana del volumen del líquido, V , que se introduce en ellas en función de la altura, h , que va alcanzando el líquido al ir las llenando. Para dibujar las gráficas cartesianas

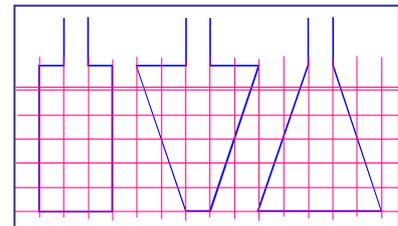


Figura 1.

correspondientes a las funciones de llenado, $V=f(h)$, se seguirá un procedimiento de análisis cualitativo de la influencia de la forma de los perfiles de la vasijas en la variación del volumen y de la altura en los siguientes términos:

1. Según que aumenta la altura del nivel el volumen del mismo crece igual de rápido.
2. Según que aumenta la altura del nivel el volumen del mismo aumenta más deprisa.
3. Según que aumenta la altura del nivel el volumen del mismo crece más despacio.

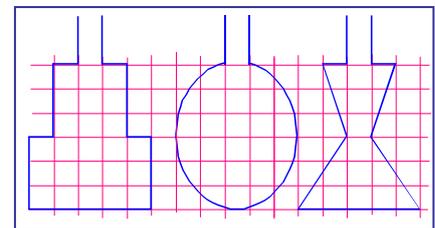


Figura 2.

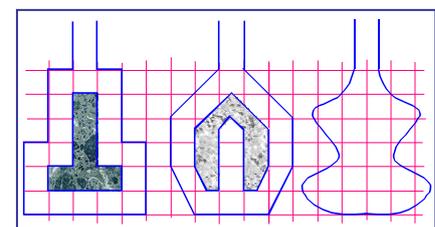


Figura 3.

Tarea 3. A la vista de las gráficas funcionales de las tareas que se acaban de proponer, es fácil ver que hay puntos y regiones de la mismas que indican cambios en los ritmos de crecimiento (También se podrían haber construido las gráficas de vaciado del carter representando la cantidad de líquido que va quedando en el carter en función de la profundidad que alcanza en su interior. En este caso el volumen decrece al aumentar la profundidad). Escribir una leyenda explicativa de las características de cada curva y detectar los puntos notables de las mismas es una tarea muy ilustrativa. Hágase.

2. GRÁFICAS DE TEMPERATURA

Uno de los controles de los enfermos que se lleva a cabo en los hospitales es el relativo a su temperatura. La figura 4 reproduce uno de estos gráficos y en él se puede apreciar la evolución de la fiebre durante 12 horas. Además, al gráfico le acompañan las leyendas de administración de los medicamentos, como se muestra en las figuras 4 y 5.

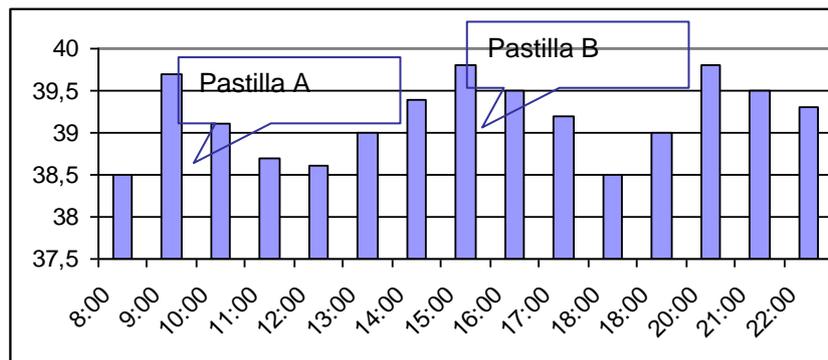


Figura 4. Variación de la fiebre

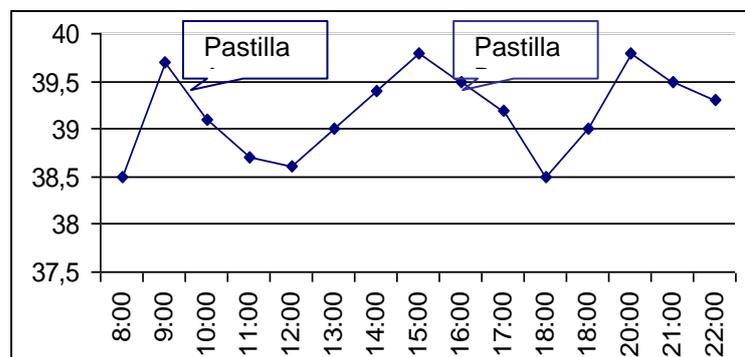


Figura 5. Variación de la fiebre

Tarea 4. Hacer un comentario sobre las gráficas de las figuras 4 y 5. Conviene fijarse en las regiones de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, ... Se trata de redactar una explicación verbal sobre el estado del enfermo reflejado por la temperatura, efecto de los fármacos, mejoría, reposo, cansancio, ...

Tarea 5. Las gráficas 4 y 5 son muy diferentes. Sin duda es interesante describir sus analogías y sus diferencias (discreto, continuo). Por otra, parte es claro que al registrar la temperatura en función del tiempo se obtiene una función que es algo más que continua. Sin embargo, los puntos obtenidos con el termómetro se unen con segmentos (interpolación segmentaria) cuando en realidad se debieran enlazar con suavidad.

Comentar esta posibilidad y qué modelo describiría mejor la evolución de la temperatura en un enfermo.

Tarea 6. Una tarea interesante consiste en reflejar las gráficas de temperatura de temperatura de tu ciudad. La prensa publica las temperaturas máxima y mínima de cada día. Se propone consultar la prensa de los últimos quince días, representar las temperaturas mínima y máxima alcanzadas en esos días en un diagrama similar al de la figura 5 y hacer un comentario sobre el fenómeno representado.

3. GRÁFICAS CLÍNICAS

Es un hábito muy extendido en textos que no son de matemáticas expresar relaciones funcionales mediante representaciones gráficas, que se han obtenido por procedimientos experimentales. También es una práctica, no menos extendida en textos matemáticos, considerar funciones únicamente definidas mediante una representación simbólica. Esto es un error didáctico, ya que parece que las funciones sólo se pueden representar mediante el sistema simbólico-algebraico. Este error se transmite a los estudiantes de Matemáticas, suele perdurar en ellos en su actividad profesional de Profesores y repercute en los aprendizajes de forma negativa. Como ejemplo de que las gráficas funcionales contienen una información precisa sobre el fenómeno se representan, se muestran cuatro figuras, cuyas gráficas, que tienen que ver con el funcionamiento del músculo más importante del organismo humano, el corazón, describen funciones importantes.

La cantidad de litros de sangre que bombea el corazón hacia la aorta por minuto se denomina gasto cardiaco y este bombeo, fundamentalmente, se produce por la diferencia de presión entre la aurícula y la aorta (presión auricular - presión arterial).

La figura 6 muestra el gasto cardiaco en función de la presión auricular derecha y cómo pueden influir en el mismo la estimulación de los músculos simpáticos (que favorece el gasto) o la estimulación de los músculos parasimpáticos o vagos (que reducen el gasto). Lo primero que salta a la vista es que cuando la presión está por debajo de -2 mm de Hg el gasto es cero y, por tanto, el corazón no tiene actividad, no bombea sangre a las arterias. A una presión auricular derecha próxima a 0 se produce un mayor

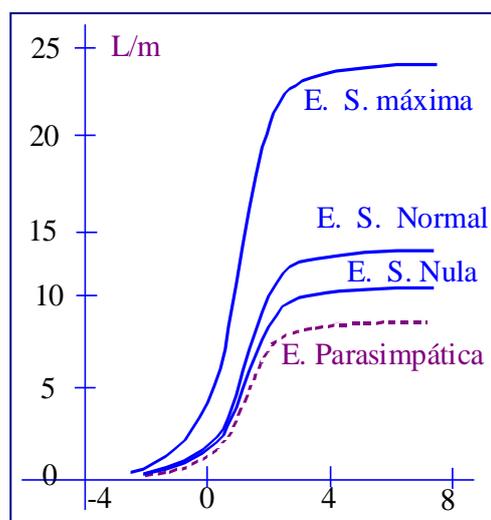


Figura 6. Gasto cardiaco en función de la presión auricular

crecimiento en el gasto, después, alrededor de 2 mm de presión se produce un cambio en la rapidez de crecimiento y aunque el gasto sigue siendo creciente con la presión, ese crecimiento se hace más lento; en torno a 3 mm de Hg el crecimiento se vuelve muy lento y alcanza una zona de meseta en la que no supera un valor límite aunque la presión aumente mucho, este valor es el de máximo gasto.

Tarea 7. Seguro que la terminología matemática ayuda a comprender mejor el fenómeno y a explicar el comportamiento debido a la estimulación registrado en la figura 6. Se propone redactar una interpretación lo más completa posible de la información que esta contenida en esta figura.

La figura 7 representa el gasto cardiaco de corazones sanos según su tipología: hiperactivos, normales e hiipoactivos. Una simple lectura de la figura manifiesta que la forma de las curvas es muy similar en los tres tipos y todas ellas se comportan así: en torno a 0 el gasto comienza a crecer muy deprisa, después se pasa por una inflexión y finalmente se alcanza una zona de meseta donde se llega a un valor límite que es el de gasto máximo.

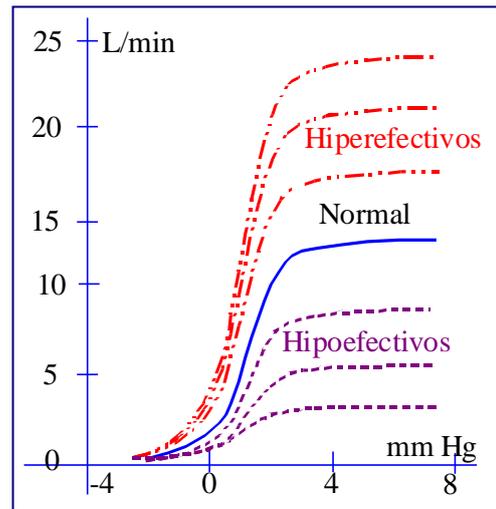


Figura 7. Gasto cardiaco en corazones normales hiperefactivos e hiipoefactivos

Tarea 8. Explicar qué efecto producen las inflexiones registradas en la figura 7. Dar una breve explicación de las diferencias en términos cuantitativos y cualitativos de los tres tipos de corazones. Indicar si esta gráfica tiene alguna relación con la anterior y si hay algún patrón de comportamiento. (Piénsese, por ejemplo en cómo son las gráficas cartesianas de todas las funciones cuadráticas, las cúbicas, ...).

La figura 8 es más compleja y en ella se representan el gasto cardiaco (línea roja discontinua) y el gasto de retorno venoso (1) normales, y los mismos gastos cuando se ha producido una insuficiencia cardiaca. En términos globales es claro que el volumen de sangre que llega al corazón es el mismo que éste bombea; pero, además, cuando la presión auricular es 0 el gasto de entrada y el gasto de salida (punto A)

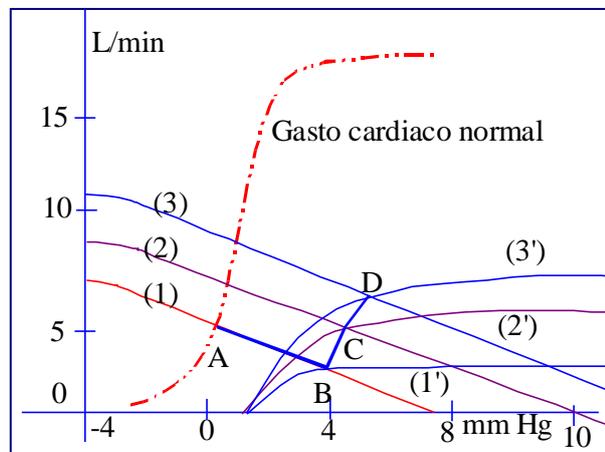


Figura 8. Gasto cardiaco y retorno venoso cuando se produce una insuficiencia cardiaca.

son iguales. Sin embargo, cuando se produce un infarto esto no es así: El gasto cardiaco sufre un fuerte descenso (1') y su flujo coincide con el gasto de retorno (que sigue siendo el mismo) en B, a una presión auricular en torno a 4 mm de Hg. Inmediatamente después de producirse la insuficiencia cardiaca el gasto aumenta un poco (2') y el retorno también (2) y ambos gastos coinciden en C a una presión auricular mayor (en torno a 5 mm). Pasado un período de tiempo, tanto el gasto cardiaco como el retorno venoso continúan aumentando, coincidiendo sus flujos en D a una presión auricular mayor. La curación tiene que pasar por una fase en la que el gasto cardiaco vuelva a las condiciones normales, lo que implica la aplicación de una terapia que favorezca el aumento del mismo a menor presión.

Tarea 9. En la figura 8 están representadas unas cuantas funciones. Conviene identificarlas y describir lo que representa cada una de ellas con las características de cada una de ellas, destacando los cambios que registran. Varias de estas funciones ya han sido descritas antes, pero hay dos que no. Identificarlas en la gráfica.

Tarea 10. Efectivamente las dos funciones a las que alude la tarea anterior están representadas por los segmentos curvilíneos *AB* y *BCD*. Explicar el fenómeno que describen ambos.

Tarea 11. Otra tarea interesante, sin duda, consiste en explicar cómo evolucionan las gráficas del gasto cardiaco en los instantes posteriores al infarto y en el período de recuperación (Estas evoluciones están prácticamente descritas, pero convendría hacer algunas gráficas intermedias y analizar los puntos de intersección con el retorno)

En la figura 9 aparecen representadas dos gráficas funcionales que tienen que ver con la respiración pulmonar. También aparece representada la presión transpulmonar como la diferencia de ambas, pero no aparece un gráfico cartesiano de la misma. Estas gráficas tienen unas formas un tanto diferentes de las que se han considerado hasta ahora, pero la explicación de los fenómenos es similar.

Tarea 12. ¿Se puede pensar que si se trata de un organismo perfecto y el ritmo de respiración fuera regular, tanto la presión alveolar como la presión pleural

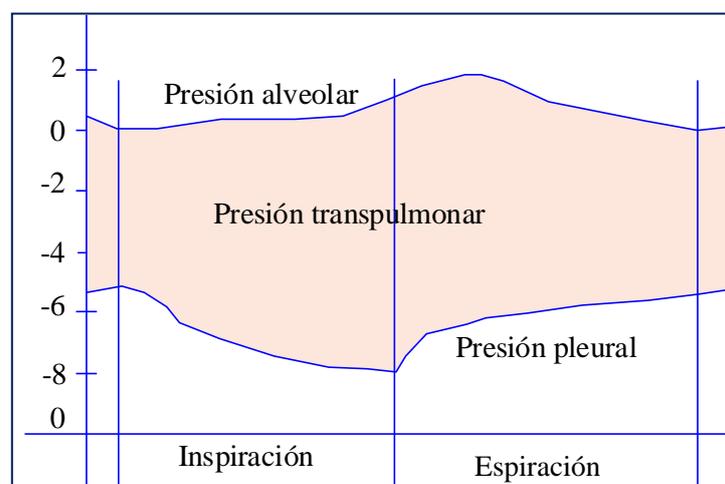


Figura 9. Variación de la presión transpulmonar.

deben ser funciones periódicas? ¿Cuál sería el período?

Tarea 13. Considerando la figura 9, es claro que se puede construir un gráfico cartesiano que represente a la presión transpulmonar. Es una tarea que requiere ser cuidadosos en la transferencia de medidas y que obliga a los alumnos a ser precisos con la regla y con el compás (Esta tarea, además, sirve para reforzar que el instrumento que se debe utilizar para transferir las medidas es el compás y no la regla graduada).

Tarea 14. Analizando la figura 9 y la figura construida en la tarea anterior, se puede describir el fenómeno de la respiración y dar detalles sobre el mismo. En este análisis se ve la importancia del crecimiento y decrecimiento de las funciones de los extremos, el dominio, valores iniciales y finales de la función. A propósito de estos dos últimos, en el eje de abscisas del diagrama cartesiano se ha escrito la leyenda “inspiración expiración”, pero esta leyenda oculta a la auténtica variable dependiente. Explicar razonadamente qué variable es la que se tiene que considerar.

Para finalizar el capítulo se proponen tres nuevas gráficas cartesianas para que sean analizadas por los alumnos; las tres representan fenómenos diferentes y la forma de las mismas también es distinta. Como en las tareas anteriores, se trata de que los alumnos expliquen razonadamente el fenómeno que representan, los valores mínimos, máximos, la variación (los ritmos) del crecimiento o decrecimiento, ...

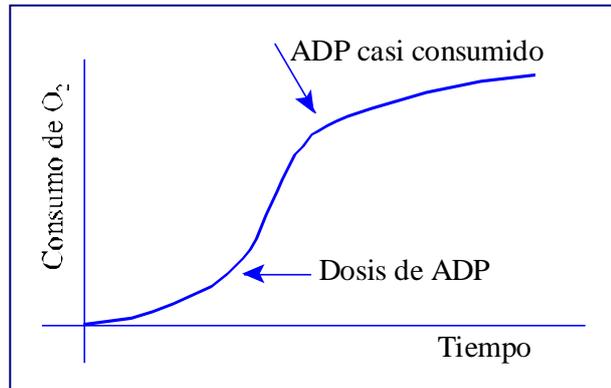


Figura 10. Variación del consumo de O_2 al suministrar una dosis de ADP.

Tarea 15. En la figura 10 se representa el consumo de O_2 al suministrar una dosis de ADP en función del tiempo. No aparece ninguna escala en ninguno de los ejes cartesianos, pero seguro que se puede explicar el fenómeno representado, sobre todo la influencia del ADP suministrado, cuya información se presenta en las dos leyendas incorporadas a la gráfica. Explicar la evolución del consumo de O_2 de forma razonada.

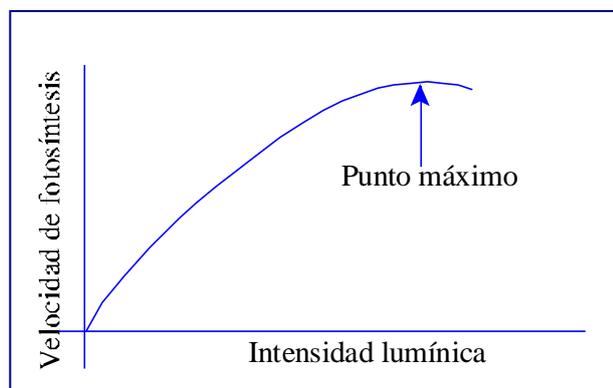


Figura 11. Variación de la velocidad de fotosíntesis

Tarea 16. En la figura 11 se representa la velocidad de fotosíntesis en función de la intensidad lumínica. Una primera pregunta interesante consiste en explicar por qué dicha gráfica pasa por el origen de coordenadas, pero hay otras que completan que completan la información: describir cuándo la velocidad de fotosíntesis crece más deprisa, más despacio, cuándo decrece, qué supone en este caso haber alcanzado el máximo, ...

Tarea 17. El gráfico de la figura 12 representa la variación de la actividad enzimática considerando cómo influye en la actividad de la fosforilasa y de la sintasa al suministrar glucosa. Explicar de forma razonada toda la información sobre el fenómeno que está registrada en dicha figura.

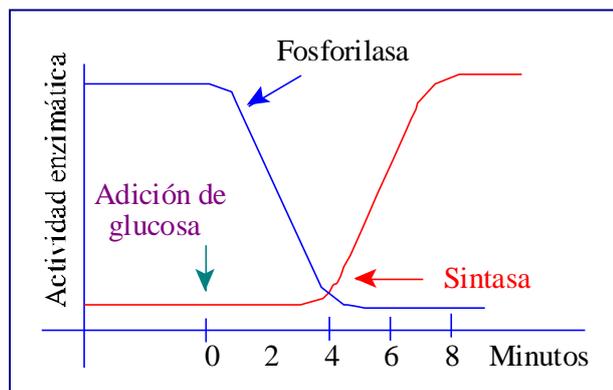


Figura 12. Variación de la actividad de la fosforilasa y de la sintasa en el hígado al suministrar glucosa en el flujo sanguíneo.

Tarea 18. No sé si en las tareas anteriores se ha notado la ausencia de datos numéricos en el eje de ordenadas, es evidente que sería una información complementaria y la siguientes preguntas pueden ayudarnos a pensar en su inclusión ¿Qué aportaría la inclusión de datos numéricos en el eje de ordenadas? A falta de datos numéricos y suponiendo que gráficas representen comportamientos normales parece natural que la forma de la gráfica es lo que se debe tener en cuenta en cada caso, ¿es así?. Responder razonadamente.

OTRAS GRÁFICAS

La figura 13 esta escaneada de Neuffer (1978) y, junto con su leyenda representa la claridad que tienen las paredes verticales entre las 9:00 y las 17:00 h según su orientación. Se trata de cuatro gráficas cartesianas, que a simple vista pueden parecer un poco sorprendentes. Sin embargo, una breve reflexión acerca de la inclinación de los rayos solares sobre las fachadas ayuda a comprender las gráficas de la figura 13.

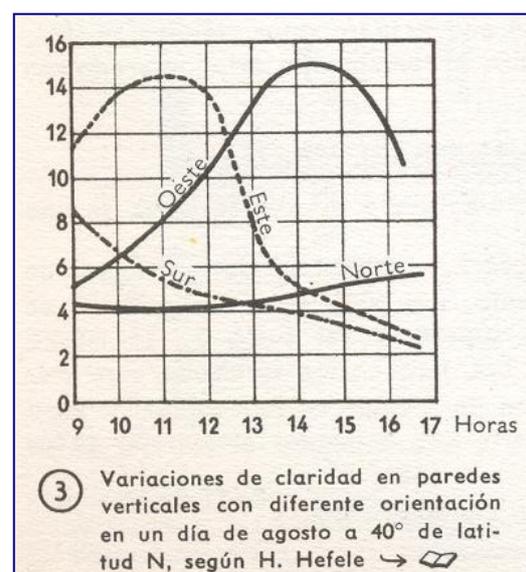


Figura 13. Claridad de las fachadas.

Tarea 19. El gráfico que muestra la figura 14 muestra la velocidad relativa de producción y destrucción de materia orgánica en función de las temperaturas anuales medias. Está tomado de A. N. Strahler (1982, pág.328). Explicar

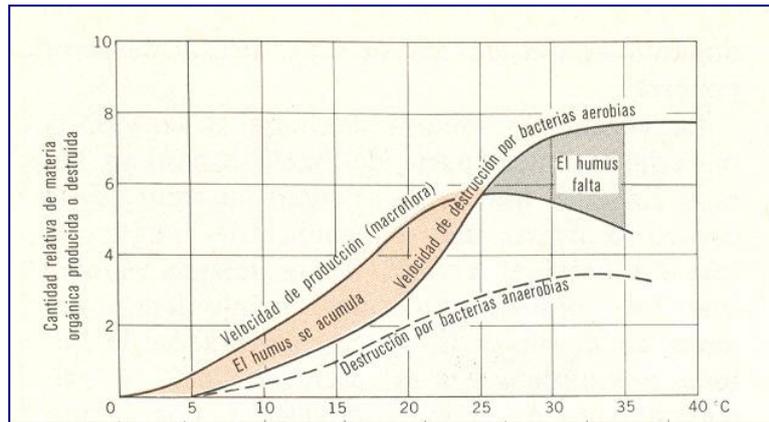


Figura 14. Variación de materia orgánica.

razonadamente la información contenida en las gráficas funcionales de la figura 17.

Tarea 19. Explicar razonadamente la información de la figura 15. Está tomada de Rusch y Weineck (2004, ág 267), y muestra la variación de la fuerza de un deportista con sus entrenamientos. Hay dos zonas muy diferentes y una barrera (máximo en el extremo).

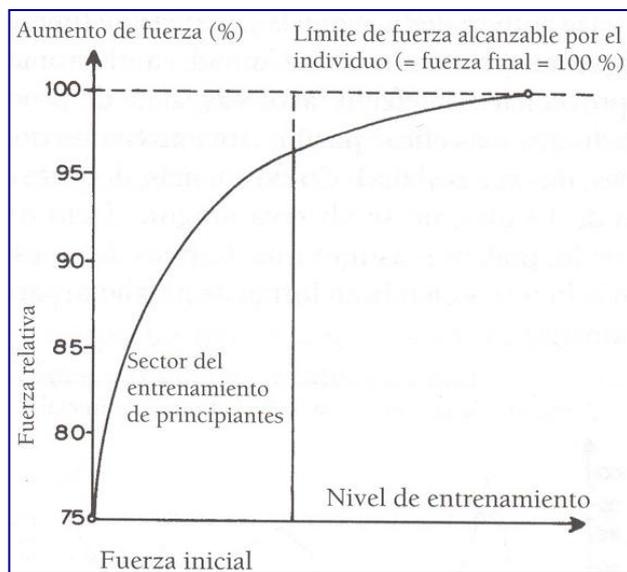


Figura 15. Variación de la fuerza de un deportista.

Tarea 20. La figura 16 esta escaneada de la “Guía de Isover” y representa la absorción acústica de la instalación de un techo metálico. Parece que cuando la bandeja metálica se instala con arena de absorción la absorción acústica mejora considerablemente. Explicar de forma razonada la información de los tres gráficos cartesianos de la figura 15.

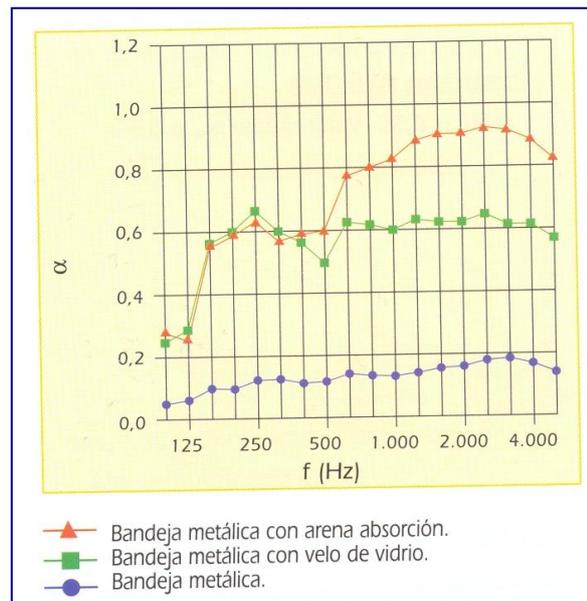


Figura 16. Absorción acústica.