2.

Marco histórico del álgebra

2.1. INTRODUCCION

La historia de la matemática ha sido utilizada por la didáctica de la matemática bajo distintos puntos de vista: desde informaciones históricas que sirven para motivar un tema nuevo, hasta la construcción de secuencias didácticas inspiradas en la progresión histórica seguida en el desarrollo de algunas teorías. En cualquier caso, la historia nos ofrece diferentes ideas para la actividad didáctica e incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos.

Expondremos en este capítulo los conceptos básicos del álgebra dentro de su marco histórico, partiendo del «contexto» que sirvió de base en la antigüedad para elaborarlos. con el fin de que puedan ser utilizados también hoy como «contexto» para construirlos en clase.

Esto nos permite satisfacer diversas necesidades, tales como:

— Representar las matemáticas como parte de la cultura humana que evoluciona con ella, preparando así el terreno para llegar a la organización que los conceptos matemáticos tienen actualmente.
— Reconocer la importancia del lenguaje simbólico y de las técnicas, y las insuficiencias y ambigüedades de cada formalismo.
— Construir o profundizar los conceptos matemáticos que se han elegido por medio de la diversidad con la cual cada época los presenta.

Se pueden crear secuencias didácticas, por ejemplo, reflexionando sobre el simbolismo de cada época, viendo las posibilidades y los límites de cada uno en particular, insistiendo en los niños en la idea de que las matemáticas evolucionan y que no es una ciencia hecha y fija.

No obstante, este planteamiento presenta algunos problemas para llevarlo a cabo. Entre ellos destacamos la imposibilidad de presentar a los niños los temas con una exactitud histórica, ya que determinados formalismos o demostraciones exceden su nivel de conocimiento. En estos casos es preciso hacer una adaptación a las diferentes edades, sin, por ello, deformar la realidad histórica.

2.2. INICIOS DEL ALGEBRA Y CLASIFICACION

El álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan el uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones. Está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico.

En las últimas décadas, el álgebra ha cobrado gran importancia. Sus aplicaciones se han multiplicado debido a problemas tecnológicos, al análisis y también a la física, que ha podido expresar cuestiones fundamentales de mecánica cuántica por medio de expresiones algebraicas.

Para dar una idea de los inicios del álgebra es imprescindible remontarse al concepto de número. Los números eran percibidos por los antiguos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, propiedad que ellos no podían distinguir claramente. Más adelante, aparecen las operaciones con números como reflejo de las relaciones entre los objetos concretos, y los hombres fueron descubriendo y asimilando las relaciones entre los números. Finalmente, a medida que la vida social se hizo más intensa y complicada, fueron apareciendo problemas más complejos que impulsaron a perfeccionar los nombres y «símbolos» de los números.

La primera etapa hacia los signos matemáticos y las fórmulas en general, la constituye la aparición de los símbolos numéricos, que aparentemente se produjo al mismo tiempo que la escritura y que jugó un papel fundamental en el desarrollo de la aritmética. Todavía en este tiempo, cualquier ley o la resolución de un problema matemático se expresaba con palabras, pues la utilización de signos para las operaciones aritméticas y la designación literal para la incógnita tuvo lugar mucho más tarde.

La palabra «ALGEBRA» proviene del título de un libro *Al-jabr* (algunos usan Al-gebr) *w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed hijo de Musa nativo de Khwarizm), que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados.

El título *Al-jabr w'al-muqabalah* significa «ciencia de la restauración y oposición» o «transposición y eliminación» o, como expresa Carl Boyer, la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación (al-jabr) y la cancelación de términos iguales en ambos miembros de la ecuación (al-muqabalah).

Así, dada la ecuación

$$x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$$

al-jabr da

$$x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x^3$$

y al-muqabalah da

$$x^2 + 5x = 4x^3$$

Esta obra fue traducida al latín en los primeros años del siglo XII por Juan de Sevilla y Gerardo de Cremona, y con el tiempo se le llamó simplemente *Algebra*.

El origen del vocablo responde satisfactoriamente al contenido real de la ciencia misma. El álgebra comienza en realidad cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las «operaciones» que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números; es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas considerada formalmente desde un punto de vista general con abstracción de los números concretos.

Para estudiar la historia del álgebra dividiremos su desarrollo en tres fases:

La primera fase, que comprende el período de 1700 a. de C. a 1700 d. de C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. de C.), llamada álgebra geométrica, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los «cálculos con cantidades de distintas clases» (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

Cabe señalar en este período los trabajos del ya mencionado en el capítulo 1, George Peacock (1791-1858), tendentes a fundamentar y justificar las operaciones con expresiones literales. A él se debe el «principio de permanencia» que decía:

> *«Todos los resultados del álgebra aritmética que se deducen por aplicación de sus reglas, y que son generales en su forma, aunque particulares en su valor, son igualmente resultados del álgebra simbólica, donde son generales tanto en su valor como en su forma»*

distinguiendo entre álgebra aritmética, donde las letras representan números naturales y los signos + y − tienen el significado aritmético ordinario, y el álgebra simbólica, donde siguen actuando las leyes del álgebra aritmética, pero se elimina la restricción a los naturales.

El principio de permanencia afirmaba que todas las reglas que se verifican con los naturales, por ejemplo, conmutativa y asociativa de la suma y de la multiplicación, y distributiva de la multiplicación respecto de la suma, seguían verificándose para todos los demás números u objetos representados por las letras. Así, la importancia del significado de los símbolos quedó relegada a un segundo término ante la primacía de los símbolos por sí mismos y sus leyes de combinación; por ejemplo, la adición significará cualquier proceso que se ajuste a determinadas leyes.

Hasta este momento, finales del siglo XVIII y primera mitad del XIX, el álgebra era la ciencia de las ecuaciones y su problema fundamental radicaba en la teoría de resolución de ecuaciones algebraicas.

En la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra presentó un notable impulso debido a grandes matemáticos, entre los cuales destacamos las ideas de Galois (1801-1832) sobre la teoría de ecuaciones algebraicas. Teorías tales como la de grupos, determinantes y matrices, por citar algunas, alcanzaron un profundo desarrollo.

Todo esto favoreció el nacimiento del álgebra abstracta contemporánea (3.ª fase), llamada algunas veces álgebra moderna. En este período se prescinde de los números, de ahí el nombre de abstracta, y los objetos utilizados pueden ser cualesquiera (matrices, vectores, tensores, etc.) sobre los cuales se definen ciertas operaciones que verifican unas determinadas propiedades, construyéndose el álgebra a partir de axiomas previamente definidos.

En la actualidad, la revolución de los ordenadores está creando nuevos problemas sobre la mecanización de los cálculos algebraicos, lo que lógicamente conducirá a un desarrollo aún mayor del álgebra.

La notación algebraica presenta también tres períodos claramente diferenciados:

- El período retórico o verbal, en el cual las operaciones se describían con palabras. Este período se extiende desde los babilonios (1700 a. de C.) hasta Diophante (250 d. de C.).
- El período sincopado o abreviado, cuando empiezan a utilizarse algu-

nas abreviaciones para simplificar la resolución de los problemas. Este período comienza con Diophante y dura hasta comienzos del siglo XVI.

La ecuación $2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$ se escribía en notación de Diophante así:

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{K}^{\tilde{\cdot}}\beta & s\eta \ \pitchfork \ \Delta^{\tilde{\cdot}}\varepsilon & \dot{\mathrm{M}}\delta & \acute{\varepsilon}\sigma\tau\xi\zeta & \mu\delta \\ x^3 2 & x8 - x^2 5 & 1 \cdot 4 & = & 44 \end{array}$$

- El período simbólico aparece en el siglo XVI y utiliza ya diferentes símbolos y signos matemáticos. Esta notación que fue más o menos estable en tiempos de Isaac Newton (1642-1727), se mantiene actualmente sin uniformidad total. Este período coincide con la 2.ª fase anteriormente indicada que, como hemos señalado, está asociada al nombre de Viète, el cual comenzó a denotar por letras no sólo las incógnitas, sino números dados previamente.

  Así, la ecuación

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$$

la escribía como

$$\mathrm{IQC} - 15\mathrm{QQ} + 85\mathrm{C} - 225\mathrm{Q} + 274\mathrm{N} \text{ aequatur } 120$$

Nuestra notación moderna es debida a Descartes (1596-1650), con ligeras modificaciones posteriores

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$$

El desarrollo histórico que hacemos a continuación no será lineal, sino que nos vamos a fijar en tres aspectos que nos parecen fundamentales: el álgebra geométrica de los griegos, que nos permite descubrir estrechas relaciones con la geometría, la resolución de ecuaciones a través de los tiempos, por su incidencia directa en la enseñanza y el álgebra moderna, por los cambios introducidos en ella.

2.3. EL ALGEBRA GEOMETRICA

Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios (métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar diversas propiedades.

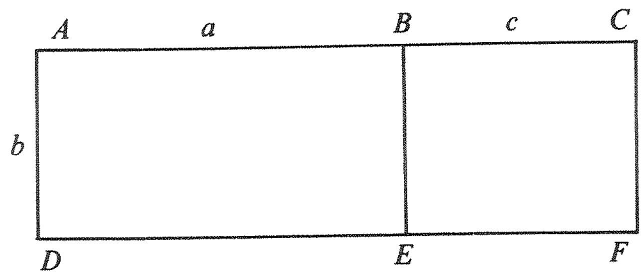
En el libro II de *Los Elementos*, de Euclides (300 a. de C.) (el más corto de todos ellos), hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos. Actualmente, nuestra álgebra simbólica los resolvería rápidamente, pero el valor didáctico del álgebra geométrica es importante.

Citaremos a continuación la forma de probar la propiedad distributiva y resolver ecuaciones.

La proposición 1 dice:

> *«Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores.»*

Esto es:



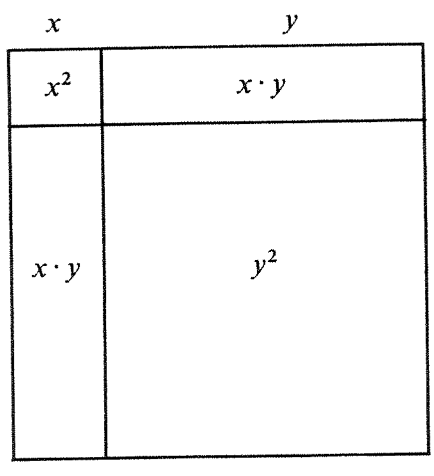
$$AD \cdot AC = AD \cdot AB + AD \cdot BC$$
$$b(a + c) = b \cdot a + b \cdot c$$

como podemos ver, es la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. De forma análoga se demuestran las propiedades asociativa y conmutativa del producto.

La proposición 4 nos permite verificar la expresión

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

> *«Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos»* (Fig. 2.1).



$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

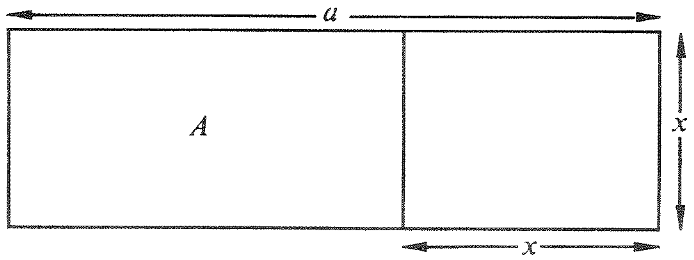
Figura 2.1

Con la misma habilidad eran capaces de resolver ecuaciones cuadráticas de los tipos $ax - x^2 = b^2$ y $ax + x^2 = b^2$.

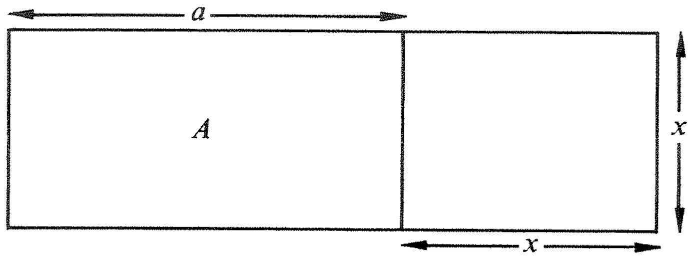
La representación geométrica de estas situaciones viene dada por la construcción sobre un segmento a, de un rectángulo cuya altura desconocida x debe ser tal que el área del rectángulo considerado exceda del área dada en el cuadrado de lado x, en el primer caso

$$ax - x^2 = b^2$$

con los segmentos a y b verificando la relación $a > 2b$.



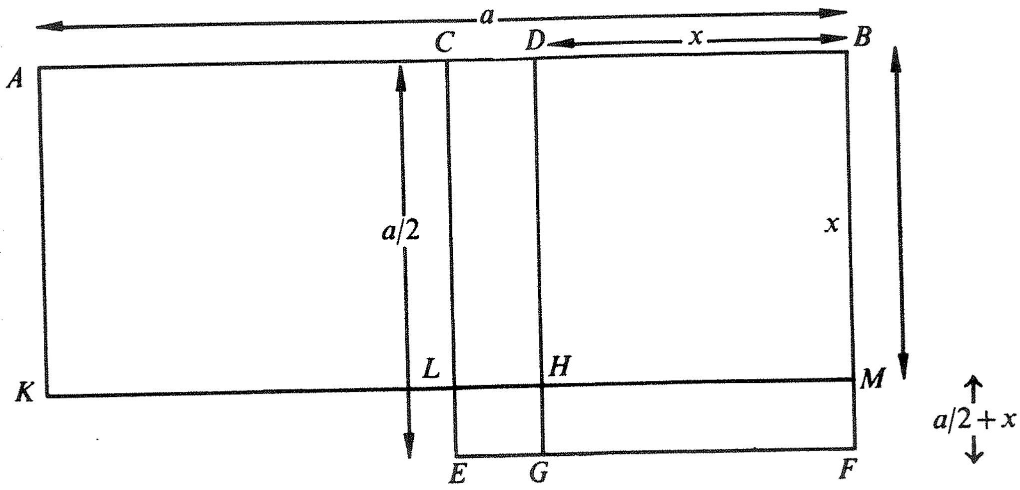
y en el segundo $ax + x^2 = b^2$, que se quede corto respecto del área A.



De esta forma, los griegos consiguieron resolver las ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de «aplicación de áreas». He aquí cómo lo hacían en el primer caso. Se basaban en la proposición 5, que dice:

> *«Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total, junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad.»*

En nuestra notación, para resolver la ecuación de segundo grado $ax - x^2 - b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, determinamos un segmento $AB = a$ y construimos un rectángulo $ABMK$ de área $a \cdot x$. Fijando en éste un cuadrado de lado x, $DBMH$, obtenemos un nuevo rectángulo $ADHK$ de área $ax - x^2$, que es igual al área de un cuadrado de lado b.



Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $a/2$, $CBFE$, se deduce, del uso de la proposición 5 que el cuadrado $CBFE$ de área $(a/2)^2$ excede del rectángulo $ADHK$ de área $ax - x^2 = b^2$, en el cuadrado $LHGE$ de lado $a/2 - x$; es decir,

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2$$

que permite solucionar la ecuación dada $ax - x^2 = b^2$, con

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

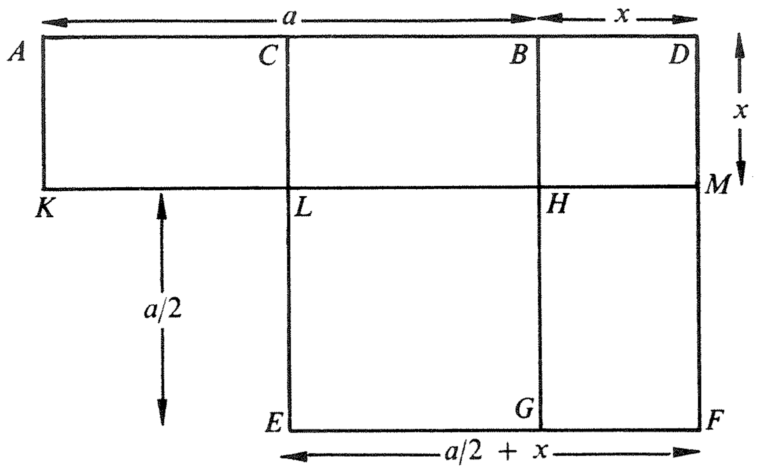
NOTA: Los segmentos a y b verifican la relación $a > 2b$.

En el segundo caso se basaban en la proposición 6, que dice:

> *«Si se corta en dos partes iguales una línea recta y se le añade (siempre en línea recta) otra línea recta, entonces el rectángulo contenido por el total (con la línea recta añadida) y la línea recta añadida, junto con el cuadrado construido sobre la mitad, es igual al cuadrado construido sobre la línea recta formada por la mitad y la línea recta añadida.»*

En nuestra notación, para resolver la ecuación de segundo grado $ax + x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, determinamos un segmento $AB = a$ y construimos, por una parte, un rectángulo $ABHK$ de área $a \cdot x$, y de otra, por prolongación del segmento AB el rectángulo $ADMK$ de área $ax + x^2$, que exceda al rectángulo anterior en un cuadrado de área x^2, y que es igual al área de un cuadrado de lado b, es decir, $ax + x^2 = b^2$.

Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $a/2$, $LHGE$ y



con un rectángulo de lados x y $a/2$, $HMFG$, tenemos de la proposición 1 que el área del cuadrado $CDFE$ es igual a

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 + ax$$

donde la distancia $CD = \frac{a}{2} + x$ es igual a

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

es decir,

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$$

que permite solucionar la ecuación $ax + x^2 = b^2$.

2.4. RESOLUCION DE ECUACIONES

- **Ecuaciones lineales**

Una ecuación lineal es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde x es la incógnita y a, b y c son números conocidos. Para obtener la solución procedemos así: sumamos el opuesto de b en los dos miembros:

$$ax + b + (-b) = c + (-b)$$

$$ax = c - b$$

multiplicamos por el inverso de a:

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(c - b)$$

y obtenemos la solución de x:

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Pero para llegar al proceso actual de resolución han pasado más de tres mil años.

Los *egipcios* nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind —1650 a. de C.— y el de Moscú —1850 a. de C.—) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refieren a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$

$$x + ax + bx = 0$$

donde a, b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban «aha» o «montón».

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhind responde al problema siguiente:

«Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24»

en notación moderna, la ecuación sería:

$$x + 1/7x = 24$$

La solución la obtenían por un método que hoy conocemos con el nombre de «método de la falsa posición» o «regula falsi». Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos obtendremos la solución exacta.

Supongamos que fuera 7 la solución, al sustituir en la x nos daría

$7 + 1/7 \cdot 7 = 8$, y como nuestra solución es 24, es decir, $8 \cdot 3$, la solución es $21 = 3 \cdot 7$, ya que $3(7 + 1/7 \cdot 7) = 24$.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad), cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto al simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

Los *babilonios* (el mayor número de documentos corresponde al período 600 a. de C. a 300 d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizá por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

Entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación $5x = 8$. En las tablas en base sexagesimal hallaban el recíproco de 5 que era 12/60 y en la tabla de multiplicar por 8, encontramos $8 \cdot \frac{12}{60} = 1 \cdot \frac{36}{60}$.

Las matemáticas babilónicas abarcaban generalmente soluciones aproximadas de las ecuaciones determinadas y utilizaban fórmulas tales como:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

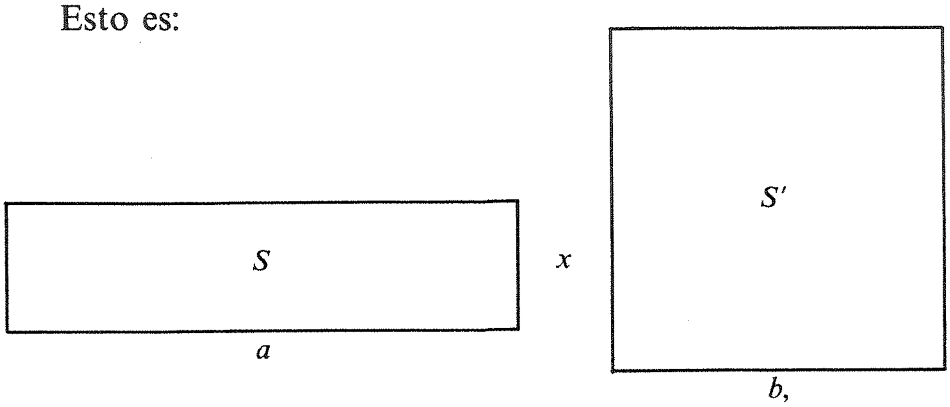
Los matemáticos *griegos* no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era, como hemos visto, mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

> *«Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó la sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad.»*

Los primeros documentos matemáticos *indios* que existen (datan del siglo III d. de C.) son los Sulvasūtras, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. En éstos aparece el siguiente problema:

> *«Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado.»*

Esto es:



es decir,

$$ax = b^2$$

Lo resolvían utilizando el método de la falsa posición, como los egipcios.

Posteriormente, Brahmagupta (siglo VII) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura «ya», y las operaciones por la primera sílaba de las palabras.

Dada la ecuación $ax + b = cx + d$, la solución vendrá dada dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes de los desconocidos; esto es,

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Estos métodos pasaron a los árabes que lo extendieron por Europa. Al algebrista Abu-Kamil (siglos IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición.

El método de la «doble falsa posición» es el siguiente:

Sea la ecuación $ax + b = 0$ y supongamos dos valores para la x:

$$\left.\begin{matrix} x = m \\ x = n \end{matrix}\right\} , \quad \text{entonces} \quad \left.\begin{matrix} am + b = p \\ an + b = q \end{matrix}\right\} \qquad [1]$$

restando,

$$a(m - n) = p - q$$

Por otra parte, eliminando a en [1]

$$\left.\begin{matrix} amn + bn = pn \\ amn + bm = qm \end{matrix}\right\} \qquad [2]$$

que restando,

$$b(n - m) = pn - qm$$

y dividiendo ambos resultados,

$$-\frac{a}{b} = \frac{p - q}{pn - qm}$$

o también

$$-\frac{b}{a} = \frac{pn - qm}{p - q}$$

siendo esto último el valor de x.

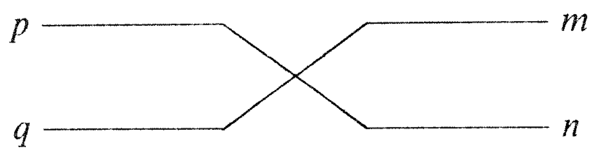
Veamos un ejemplo. Sea la ecuación $5x - 10 = 0$, si tomamos como valor de x: $x = 3$ y $x = 4$, y sustituyendo,

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 4 - 10 = p \\ 5 \cdot 3 - 10 = q \end{array}\right\}$$

se tiene que

$$x = \frac{10 \cdot 3 - 5 \cdot 4}{10 - 5} = \frac{30 - 20}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Este principio fue posteriormente presentado en una forma ligeramente modificada por el «método de las escalas». El nombre proviene de un diagrama que permitía escribir la solución rápidamente:

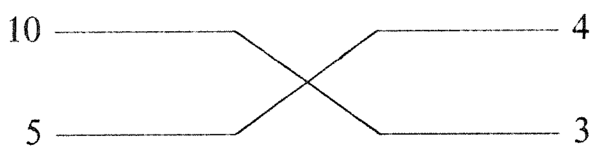


Las dos líneas de la izquierda representan p y q y las de la derecha m y n y la cruz del centro indica que hay que multiplicar.

El método puede ser sintetizado como sigue:

1. Consideran dos valores cualesquiera de la incógnita m, n.
2. Calculan los errores correspondientes a ellos p, q.
3. Hallan el valor de la incógnita en función de los valores dados y sus errores.

En nuestro ejemplo,



con lo cual,

$$x = \frac{10 \cdot 3 - 5 \cdot 4}{10 - 5} = 2$$

• **Ecuaciones cuadráticas:**

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde x es la incógnita y a, b y c son números conocidos con $a \neq 0$.

Resolver esta ecuación consiste en hallar los valores de x que la satisfagan.

En los documentos egipcios casi no aparecen estas ecuaciones y en los poquísimos casos que se encuentran, no parece que conocieran un tratamiento sistemático para su resolución. Sin embargo, los babilonios sí que las resolvían con soltura.

Las tablas de raíces cuadradas que poseían les permitieron resolver inmediatamente ecuaciones de la forma $x^2 + px = q$; $x^2 = bx + c$ y $x^2 + c = bx$. A menudo llamaban a la incógnita «longitud» y a su cuadrado, «área».

Entre los problemas resueltos, tenemos el siguiente:

«Hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 870.»

Expresamos su solución en notación retórica (columna de la izquierda) y en la notación actual (columna de la derecha):

Toma la mitad de 1 que es 0,50 y multiplica 0,50 por 0,50, que es 0,25. Suma este número a 870, lo que da 870,25. En las tablas comprobamos que éste es el cuadrado de 29,50. Suma 0,5 a 29,5 y el resultado es 30, el lado del cuadrado.

$$x^2 - x = 870$$

$$p = 1 \quad ; \quad p/2 = 0{,}50$$

$$(p/2)^2 = 0{,}25$$

$$q = 870$$

$$q + (p/2)^2 = 870{,}25$$

$$\sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2 = x$$

$$29{,}5 + 0{,}5 = 30$$

que es la raíz de la ecuación:

$$x^2 - px = q$$

Sin embargo, la segunda solución no la obtienen.

Hacemos notar que en los textos originales trabajan en base sexagesimal.

Posteriormente, los griegos del período alejandrino abandonaron los métodos del álgebra geométrica y se acercaron a los métodos de los babilonios.

Herón (100 d. de C.) resuelve la ecuación $x^2 + 4x = 896$, buscando un cuadrado perfecto:

$$x^2 + 4x + 4 = 900$$

$$(x + 2)^2 = 900$$

$$x + 2 = 30 \quad ; \quad x = 28$$

Diophante, el mayor de los algebristas griegos, distingue tres clases de ecuaciones cuadráticas:

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 = bx + c$$

$$ax^2 + c = bx$$

para cada una de las cuales tiene un método específico de solución.

Los *hindúes* (IV d. de C.) en los tratados sobre la construcción de altares resuelven ya ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx = c$. Trabajos posteriores ofrecen con detalle *métodos de resolución*. Aryabhata (500 d. de C.) da la regla para resolver la ecuación $6x^2 + 100x - 1600 = 0$, mediante el álgebra retórica, que expresada en nuestra notación:

$$\frac{\sqrt{16 \cdot 100 \cdot 6 + (100/2)^2} - 100/2}{6}$$

podemos expresarla con la fórmula actualmente utilizada

$$\frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + (4 \cdot 6 \cdot 1.600)}}{12}$$

Como vemos, las dos son exactamente lo mismo, con la excepción de que Arybhata elimina la raíz negativa.

Brahmagupta da dos reglas que podemos expresar simbólicamente:

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

Trabajos posteriores, tales como los de Srîdhara (siglo XI) y Bhâskara (siglo XII) describen que la ecuación cuadrática tiene dos raíces, que un número negativo no tiene raíz, y que un número negativo puede ser raíz de un número positivo.

El método utilizado en el álgebra hindú es esencialmente el «método de completar cuadrados», usando nuestra notación desarrollaríamos así:

Sea la ecuación $ax^2 + bx = c$

Multiplicamos el término independiente por el coeficiente de la x^2, añadimos el cuadrado de la mitad del coeficiente del término en x y a su raíz cuadrada le restamos la mitad del término independiente, que dividido por el coeficiente del término en x^2 nos da el valor de la incógnita.

$$a \cdot c$$

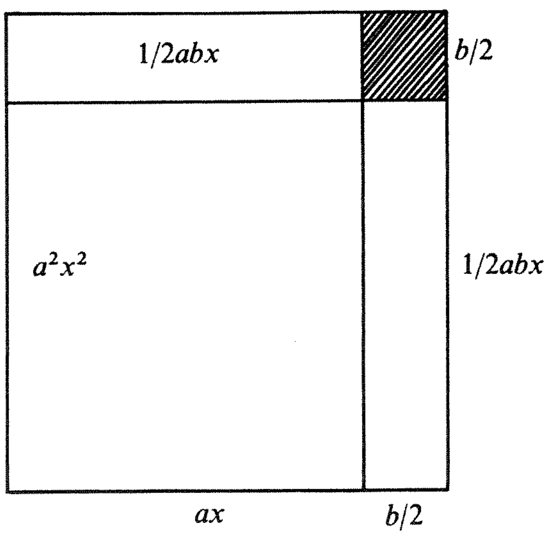
$$a \cdot c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

Desde el punto de vista didáctico se tiene una interpretación geométrica sugerente:

El método consiste en sumar el área rayada de la figura al resto:



$$(a^2x^2 + abx) + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Como $ax^2 + bx = c$, sustituimos $a^2x^2 + abx$ por $a \cdot c$:

$$a \cdot c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad [I]$$

Por otra parte, el área del cuadrado total es $(ax + b/2)^2$, siendo la longitud del lado

$$(ax + b/2) \qquad [II]$$

De [I] deducimos que la longitud del lado será:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$$

e igualando con [II] resulta

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$$

y despejando la incógnita:

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

Los conocimientos algebraicos de los indios pasaron a China y al Oeste a través de los árabes. Sin embargo, éstos también recogieron los trabajos de los griegos y por ello su álgebra incluye pruebas geométricas para resolver ecuaciones.

Al-Khwarizmi distinguía tres tipos de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 = bx + c$$

$$x^2 + c = bx$$

Como vemos, no incluían términos negativos y las soluciones negativas tampoco eran aceptadas.

Las demostraciones de sus métodos fueron geométricas. Por ejemplo, para resolver

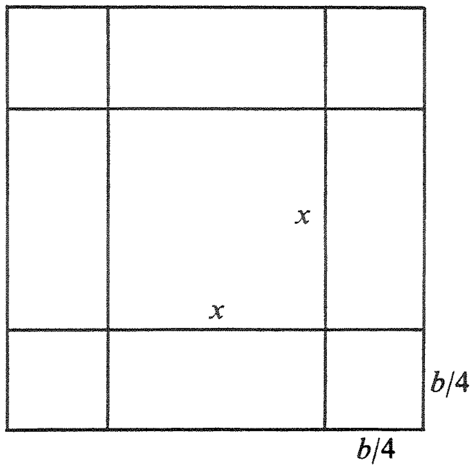
$$x^2 + bx = c$$

utilizaban el equivalente a la aplicación de la fórmula

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Tal método era justificado de la siguiente forma:
El área del cuadrado de la figura siguiente puede ser expresada como

$$\left[x + 2\left(\frac{b}{4}\right)\right]^2 \quad \text{o} \quad x^2 + 4\left(\frac{bx}{4}\right) + 4\left(\frac{b^2}{16}\right)$$



Simplificando e igualando estas expresiones,

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$$

y volviendo a la ecuación original tenemos

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

y hallando la raíz cuadrada,

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

esto es, la solución buscada será

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Michael Stifel (1487-1567) fue el primero que usó términos negativos en sus ecuaciones. Consideró tres clases de ecuaciones cuadráticas:

$$x^2 = c - bx$$
$$x^2 = bx - c$$
$$x^2 = bx + c$$

y da como soluciones

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pm c} \pm \frac{b}{2}$$

Un avance importante surgió con François Viète. No solamente introdujo una notación algebraica, sino que también reemplazó los métodos basados en pruebas geométricas por otros estrictamente algebraicos.

Por ejemplo, resolvamos

$$x^2 + bx = c$$

Se supone que x puede expresarse como la suma de dos números u y z. Sustituyendo en la ecuación,

$$(u + z)^2 + b(u + z) = c$$
$$u^2 + (2z + b)u + z^2 + bz = c$$

tomamos $z = -\dfrac{b}{2}$

$$u^2 - \frac{b^2}{4} = c$$

luego

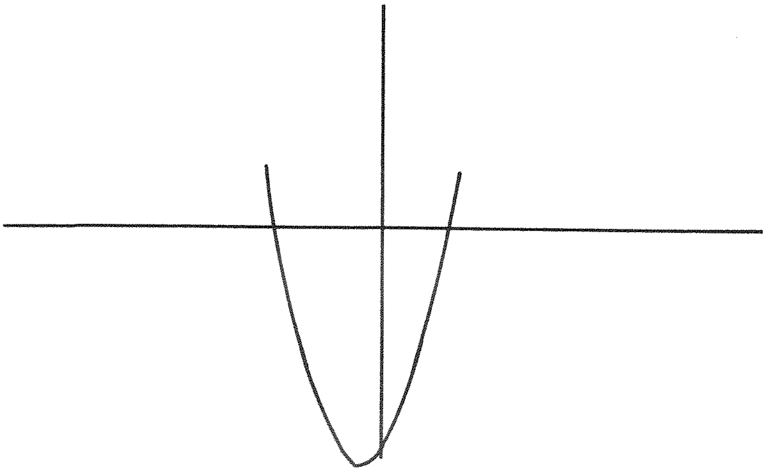
$$u = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

y a partir de u, obtendremos por sustitución el valor de x.

Viète estudió también las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación cuadrática e introdujo un método de aproximación.

La resolución de una ecuación de segundo grado también se puede realizar gráficamente. Damos valores arbitrarios a la x y con los valores que toma la expresión $ax^2 + bx + c$ trazamos el gráfico, que resulta ser una parábola. Los valores en que la gráfica corta al eje OX, son las soluciones de la ecuación.

Por ejemplo, sea $x^2 + x - 6 = y$, cuya representación es la siguiente parábola:



luego las soluciones son:

$$x = 2 \qquad \text{y} \qquad x = -3$$

Si tenemos una parábola que no corta al eje OX, como en el caso $x^2 + c$, con $c > 0$, las raíces de la ecuación vendrían dadas por los números complejos $x = \pm i\sqrt{c}$.

Los griegos conocieron bien la parábola y sus propiedades y las otras secciones cónicas. Sin embargo, sus proposiciones iban encaminadas a analizar las relaciones entre las secciones cónicas y las expresiones relativas a dos variables x e y, y no a la solución gráfica de ecuaciones.

A Descartes debemos en gran parte la aproximación moderna de la clasificación de las ecuaciones por grado y la relación de la geometría y el álgebra, que hacen posible la combinación de los métodos algebraicos y geométricos.

• Ecuaciones de grado mayor que dos

Comencemos por estudiar las ecuaciones de grado 3, que como es sabido responden a la ecuación general

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

donde a, b, c, d, son números reales y $a \neq 0$.

Los babilonios nos han dejado varios ejemplos de resolución de ecuaciones cúbicas. Por ejemplo, las de la forma $x^3 = a$, las resolvían directamente con las tablas de raíces cúbicas que manejaban con soltura, y, cuando la solución no era exacta, realizaban una interpolación lineal para buscar una aproximación. De forma similar hallaban las soluciones de

$$x^3 + x^2 = a$$

buscando en las tablas el producto

$$x^2(x + 1) = a$$

En casos más generales como

$$x^2(12x + 1) = 7/4$$

realizaban las siguientes operaciones: se multiplicaban por 12^2,

$$(12x)^2(12x + 1) = 252$$

realizando el cambio $y = 12x$, se tiene

$$y^2(y + 1) = 252$$

y una vez hallado el valor de y, se reducía el problema a la solución de la ecuación lineal citada ($y = 12x$).

Lo que no sabemos es si resolvían la ecuación cúbica de tipo general

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Hipócrates de Quíos (430 a. de C.) fue el primero que observó que el famoso problema griego de la «duplicación del cubo» era equivalente a buscar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos rectas dadas:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

de donde,

$$y = \frac{x^2}{a} \quad ; \quad y^2 = 2ax$$

y sustituyendo:

$$2ax = \frac{x^4}{a^2} \quad , \quad \text{entonces} \quad x^3 = 2a^3$$

ecuación que resolvían mediante el método de regla y compás.

En los trabajos de Diophante, encontramos un problema equivalente a resolver la ecuación

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$

Sin embargo, solamente expone que una solución es 4, pero sin explicar cómo llegó a ella. Hoy se sabe que se puede obtener simplemente dividiendo ambos miembros por $x^2 + 1$.

Posteriormente, Bhâskara (siglo XII) descubrió la posibilidad en algunos casos de reducir la ecuación cúbica a una cuadrática o lineal por medio de sustituciones adecuadas.

Así, para resolver la ecuación:

$$x^3 - 6x^2 + 12x = 35$$

resta 8 a ambos miembros

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27$$

es decir,

$$(x - 2)^3 = 27$$

de donde obtenemos $x = 5$.

Se encuentran ejemplos de *ecuaciones cuárticas* y hasta de sexto grado en las matemáticas babilónicas, pero son de una clase especial y podrían reducirse a cuadráticas.

Si en la ecuación $x^2 + bx = c$ reemplazamos x por x^2, obtenemos la ecuación cuártica $x^4 + bx^2 = c$, que puede ser resuelta como una cuadrática con x^2 en lugar de x como incógnita. Las ecuaciones cuárticas de esta clase pueden ser resueltas por referencia a tablas, exactamente por el mismo camino que las cuadráticas. Habiendo obtenido el valor de la incógnita x^2, por referencia a la tabla de raíces cuadradas, inmediatamente se produce el valor de x.

Las ecuaciones cuárticas con sus soluciones aparecen en los trabajos de Bhâskara y Mahâvîra, aunque una vez más, sólo son considerados casos específicos y no hay intento para discutir una teoría general. Un ejemplo típico en sus trabajos es el problema:

> *«¿Qué número multiplicado por 200 y sumado a su cuadrado, luego multiplicado por dos y restado de su cuarta potencia, puede ser 10.000 menos una unidad?»*

o dicho de otra forma, resolver

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9.999$$

La solución descrita es ingeniosa.

Sumando $4x^2 + 400x + 1$ a los dos miembros,

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 4x^2 + 400x + 1 = 4x^2 + 400x + 1 + 9.999$$

agrupando convenientemente,

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$$

de donde, simplificando se resuelve la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x - 99 = 0$$

cuya solución es $x = 11$.

El árabe Omar Khayyam (1050-1123) escribió un libro de álgebra que incluía hasta ecuaciones cúbicas. Consideraba que éstas sólo podían ser resueltas por métodos geométricos. Su idea consistía en utilizar, como ya habían hecho los griegos, intersecciones de cónicas. Por ejemplo, para resolver la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, el proceso a seguir sería el siguiente: se sustituye x^2 por $2py$ (que es la ecuación de una parábola) y queda:

$$x \cdot 2py + a \cdot 2py + b^2x + c^3 = 0$$

dando la ecuación de una hipérbola, con lo que basta representar en un sistema de ejes ambas curvas para obtener las soluciones. Pero aún no daban todas las soluciones y se tenían que considerar muchos casos según los valores de a, b y c.

En 1494, Luca Pacioli en el libro *Summa* estableció la imposibilidad de resolver las ecuaciones cúbicas por métodos algebraicos. En su libro se aprecia ya un paso hacia el álgebra. Utiliza las letras *p* y *m* para representar la suma y la resta, *co*, *ce* y *ae* para la «cosa» (incógnita), *censo* para el cuadrado de la incógnita y *aequalis* para el signo igual.

Cardano (1501-1576) describe en su *Ars Magna*, métodos de solución de ecuaciones cúbicas, aunque, tal como él mismo dice, no fue el descubridor de la solución.

Dejando a un lado detalles sobre esta historia, pues los datos son contradictorios, veamos algunos ejemplos de solución:

Sea la ecuación $x^3 + 6x = 20$. La resolución de esta ecuación en la forma retórica que utilizaba Cardano ocupa varias páginas. Con la notación actual, al sustituir x por $u - v$ y $u \cdot v = 2$, tendríamos

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 20$$

de donde

$$u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 6u - 6v = 20$$

$$u^3 - 6u + 6v + 6u - 6v - v^3 = 20$$

obteniendo entonces,

$$u^3 - v^3 = 20$$

Si eliminamos $v = \frac{2}{u}$, se tiene

$$u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^3 = 20, \quad \text{es decir,} \quad u^6 - 2^3 = 20u^3$$

Si, por último, hacemos $u^3 = t$, tenemos $t^2 - 20t - 8 = 0$, de donde

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 32}}{2} = 10 \pm \sqrt{108}$$

así: $u^3 = 10 + \sqrt{108}$; $v^3 = \sqrt{108} - 10$, obteniendo finalmente,

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Entonces, para el caso general, Cardano expone que la solución de la ecuación $x^3 + px = q$, vendrá dada por la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} + q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} - q/2}$$

Estudió también otros casos y cuando se le plantearon problemas con las raíces negativas, las llamó «sofisticas», argumentando que estos resultados eran «tan sutiles como inútiles».

Viète, en el siglo XVII, muestra que una ecuación cuadrática puede reducirse a una ecuación cúbica. Un siglo después ya se conoce que las ecuaciones cuadráticas, cúbicas o cuárticas tienen, respectivamente, 2, 3 o 4 raíces y se comienza a preguntar si este resultado se puede extender a ecuaciones de grado superior. La respuesta a esta cuestión nos la da el *Teorema Fundamental del Algebra*, que afirma:

«Toda ecuación algebraica de grado n, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz real o compleja.»

La primera demostración se debe a Gauss (1777-1855) que la expone en su tesis doctoral. Sin embargo, en ésta quedan algunos aspectos no del todo claros, por lo que Gauss da hasta cuatro nuevas demostraciones.

Este problema fue también estudiado ampliamente, entre otros, por D'Alembert (1717-1783), Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813). En la actualidad se han obtenido varias demostraciones rigurosas de este teorema.

- **Sistemas de ecuaciones lineales**

El sistema formado por las siguientes ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right\} \quad , \quad \text{con} \quad a, b, c, d, e, f, \text{ números reales}$$

recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Resolver el sistema consistirá en hallar las soluciones de x e y, que lo satisfagan. También aquí puede ocurrir que haya una única solución, que no haya ninguna o que sean infinitas.

Como hemos ya señalado, fueron resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como «longitud», «anchura», «área», o «volumen», sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$1/4 \text{ anchura} + \text{longitud} = 7 \text{ manos}$$

$$\text{longitud} + \text{anchura} = 10 \text{ manos}$$

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura = 20, longitud = 30. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$\left.\begin{aligned} y + 4x &= 28 \\ y + x &= 10 \end{aligned}\right\}$$

restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática. Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned} &xy = 10 \\ &9(x - y)^2 = x^2 \end{aligned}\right\}$$

sustituyendo y por $10/x$ en la segunda ecuación, se tiene:

$$9x^2 - 18x \cdot 10/x + 9(10/x)^2 = x^2$$

quedando definitivamente

$$8x^4 - 180x^2 + 900 = 0$$

llegando a la anterior ecuación bicuadrática que sí sabían resolver. Otras veces, las sustituciones eran del tipo $x = u + v$; $y = u - v$.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

La expresión

$$x = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}) - s}{n - 2}$$

permite obtener las soluciones del sistema

$$\begin{array}{lllll} x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} & = s \\ x + x_1 & = k_1 \\ x \quad\; + x_2 & = k_2 \\ \quad \vdots & \\ x \qquad\qquad\quad + x_{n-1} & = k_{n-1} \end{array}$$

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Por ejemplo, para hallar dos números x e y, cuya suma sea 20 y la suma de sus cuadrados 208, realizaba los siguientes cálculos:

Diophante

$x \approx 10 + x$

$y \approx 10 - x$

$(10 + x)^2 + (10 - x)^2 = 208$

$100 + 20x + x^2 - 100 - 20x -$
$- x^2 = 208$

$200 + 2x^2 = 208$

$2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; de donde $x = 2$

Mediante sistemas

$x + y = 20$

$x^2 + y^2 = 208$

sustituyendo $x = 20 - y$ en la segunda ecuación,

$$(20 - y)^2 + y^2 = 208$$

nos aparece una ecuación de segundo grado.

Los números buscados son 8 y 12. Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada, como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, una de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

El libro *El arte matemático*, de autor chino desconocido (siglo III a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}\right\}$$

escribían la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \end{array} \end{array}$$

y haciendo operaciones entre las columnas de la matriz obtenían un sistema más sencillo cuya solución era inmediata:

$$\begin{array}{c} (2.^a \text{ col.} \times 3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \end{array} \cdots \begin{array}{c} (2.^a \text{ col.} \times 3.^a \text{ col.}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 33 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \end{array} \cdots \begin{array}{c} (2.^a \text{ col.} - 3.^a \text{ col.}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \end{array}$$

y así sucesivamente hasta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

de donde esta última matriz nos proporciona las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 36z &= 99 \\ 5y + z &= 24 \\ 3x + 2y + z &= 39 \end{aligned}\right\}$$

Tengamos en cuenta que la resolución de sistemas lineales de ecuaciones usando matrices y determinantes aparecen en Europa con los trabajos de MacLaurin (1698-1746) y Cramer (1704-1752), aunque la idea de colocar ecuaciones en forma de filas y columnas fue mencionado por Leibniz (1646-1716) en una carta al marqués de L'Hôpital (1661-1704). Inicialmente sólo usaban determinantes, pues las teorías sobre matrices debidas a Sylvester son posteriores (1850).

• Ecuaciones diofánticas

Si se tiene una ecuación con más de una incógnita, las soluciones de la misma son indeterminadas. Así, si consideramos la ecuación

$$5x + y = 30$$

a cada valor que se atribuya a x se le asocia el correspondiente valor de y en la fórmula

$$y = 30 - 5x$$

Al expresar algebraicamente la condición o condiciones impuestas por un problema que trata de determinar ciertos números, pueden resultar ecuaciones o sistemas indeterminados. La cuestión puede presentar dos aspectos diferentes:

1. las soluciones de la ecuación o sistema planteados convienen al problema, y
2. el enunciado del problema impone ciertas condiciones en virtud de las cuales se determinan o, al menos, se seleccionan las soluciones.

Un tipo de ecuaciones relacionadas con el segundo aspecto señalado son las «ecuaciones diofánticas», llamadas así en honor del matemático griego Diophante, y que son ecuaciones lineales con distintas variables de coeficientes racionales y con la condición suplementaria de que sólo admiten como solución números naturales y pueden hacerse extensivas a soluciones enteras. (Si se trata, por ejemplo, de número de ciudadanos, no podemos admitir soluciones fraccionarias).

Para que una ecuación lineal con dos o más incógnitas y de coeficientes enteros admita soluciones enteras, es condición necesaria que el m.c.d. de los coeficientes de las incógnitas divida al término independiente.

En efecto, sea la ecuación lineal

$$Ax + By + \cdots + Eu = F, \qquad A, B, ..., E, F \in \mathbb{Z}$$

si D es el m.c.d. $(A, B, ..., E)$ y designamos por $a, b, ..., e$ los coeficientes obtenidos al dividir aquéllos por el m.c.d., es decir:

$$A = Da, \quad B = Db, \quad ..., \quad E = De$$

la ecuación anterior puede escribirse

$$D(ax + by + \cdots + eu) = F \qquad [1]$$

Si esta ecuación se satisface para valores enteros de $x, y, ..., u$ resultará que para estos valores, el primer miembro de [1] es múltiplo de D, luego, necesariamente, si existen soluciones enteras, son tales que F es múltiplo de D.

Por tanto, la ecuación diofántica $ax \pm by = c$, donde a, b y c son números enteros positivos, es resoluble precisamente si el m.c.d. de a y b es un divisor de c. Además, si (x_0, y_0) es una solución, el conjunto de soluciones está formado por todos los pares

$$(x_0 + tb, y_0 - ta), \quad \text{con } t \in \mathbb{Z}$$

Una parte considerable de la «aritmética» de Diophante está dedicada a problemas indeterminados en los que las soluciones que se requieren son números enteros positivos o como máximo cantidades racionales positivas. Diophante no presenta un método general para resolver tales problemas. Sin embargo, algunos de sus caminos de resolución son altamente ingeniosos y aplicables a problemas similares. No da soluciones generales, sino se limita a obtener una de sus soluciones, ya que probablemente sea consciente de que en muchos casos, hallada una solución, las otras se pueden calcular con facilidad.

Diophante no trata los problemas cuadráticos; el problema de este tipo más antiguo es el presentado por Pitágoras ($x^2 + y^2 = z^2$). Esta relación surge, como es sabido, de la búsqueda de todas las longitudes de los lados de triángulos rectángulos y su solución más elemental fue conocida por los egipcios (3, 4 y 5).

Varias fórmulas fueron propuestas por diferentes escritores griegos, y así recordando a Proclo, Pitágoras estableció una regla para hallar algunas de sus posibles soluciones, indicando que si n es impar, se cumple que

$$n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2$$

es decir, todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos (véase el cap. 5).

Problemas que implican triples pitagóricos así como problemas lineales fueron resueltos en India y China. Por ejemplo, en los trabajos de Aryabhata, Bhâskara, Brahmagupta y otros, se encuentran problemas de este tipo, así como problemas cuadráticos con cuatro incógnitas; algunos de éstos poseen grados mayores de dificultad que los resueltos por Diophante en su *Aritmética*.

Fermat (1601-1665), uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos, demostró que no existen números enteros positivos x, y, z que satisfagan la ecuación

$$x^3 + y^3 = z^3$$

y aunque se dice que demostró también que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución para $n > 3$, no se ha encontrado su prueba y todavía hoy no ha sido posible hacer tal demostración. Lo anterior es conocido como «último teorema de Fermat» y ha sido fuente de inspiración para muchos avances del álgebra moderna.

2.5. EL ALGEBRA ABSTRACTA

Con todo el material acumulado en los últimos años se fueron gestando a lo largo del siglo XIX las bases del álgebra moderna. En este siglo aparecen conceptos fundamentales, tales como vectores, cuaterniones y matrices, por citar algunos, y se desarrollan las teorías sobre estructuras: grupos, anillos y cuerpos.

Entre los precursores del álgebra moderna, podemos señalar al ya citado Peacock, que junto a Gregory (1813-1844) y a De Morgan (1806-1871) intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos.

El problema fundamental del álgebra siguió ocupando a un número importante de matemáticos dando origen a la «teoría de grupos». Un paso decisivo fue la demostración de que la ecuación de quinto grado (o superior) no es posible resolverla mediante radicales, conseguida primero por Ruffini en 1799 y de forma rigurosa por Abel en 1826. Tanto Ruffini como Cauchy (1789-1857) esbozan el concepto de grupo, pero es Galois (1811-1832) a quien debemos la idea de aplicar la teoría de grupos a la resolución de ecuaciones. Estas teorías, que tardaron en divulgarse, poseen gran impotancia en el desarrollo de teorías posteriores. Klein, en su clásico programa de Erlangen (1872) la utilizó para sistematizar las geometrías y Lie (1842-1899) las aplica a ecuaciones en diferencias con derivadas parciales.

Los números complejos fueron estudiados simultáneamente por varios autores, entre los que se encontraba Gauss (1777-1855), el cual aportó la representación geométrica de dichos números, pero no le fue posible extender esta idea al espacio de tres dimensiones. Hamilton (1805-1865), paralelamente y partiendo de parejas algebraicas, creó los cuaterniones, como números que satisfacen la siguiente expresión:

$$w = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$$

Estas cuadruplas pueden ser combinadas mediante las operaciones suma y resta. Ahora bien, para la multiplicación tuvo que añadir las siguientes condiciones:

$$ij = k; ji = -k; jk = i; kj = -i; ki = j; ik = -j; i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Sin embargo, encontró que el producto no era conmutativo ($w \cdot w' \neq w' \cdot w$).

Parece que en el momento actual está prácticamente abandonada la aplicación a la física que Hamilton quiso dar a los cuaterniones, sin embargo, éstos dieron origen a un tipo de álgebra no conmutativa, abriendo así un camino para la creación de álgebras que no cumplan las leyes fundamentales.

Otro desarrollo importante es la teoría de matrices. Recordemos que éstas tienen un precedente en los métodos chinos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente Kowa (1683) sistematizó este método y Leibniz creó los determinantes en los que trabajó Cramer (1704-1752) para publicar su regla sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Aunque la idea de matriz está implícita en los cuaterniones de Hamilton y en la extensión a n-uplas de Grassmann (1809-1877), se atribuye a Cayley (1821-1895) su creación.

La teoría de matrices de Cayley tuvo su origen en el estudio de las transformaciones lineales. Simultáneamente, Sylvester (1814-1897) amplía la teoría de los determinantes y publica, entre otros, un método para eliminar x de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m.

Posteriormente, Dodgson (1823-1898), más conocido por Lewis Carroll, enriquecerá la teoría sobre determinantes, y otros, como Frobenius y Jordan, trabajarán sobre matrices.

Las nociones de determinante y matriz, consideradas como innovaciones en el lenguaje matemático, se revelaron altamente útiles, no sólo en el desarrollo mismo de las matemáticas, sino como instrumento de cálculo que forma parte de las técnicas del matemático moderno.

A George Boole (1815-1864) debemos otro tipo de álgebra, el álgebra de Boole, que se aplica al álgebra de conjuntos o a la lógica, y, más recientemente, en el diseño de computadoras.

Después de 1870, con la obra de Benjamín Peirce (1809-1880), se da un paso hacia una concepción más abstracta con el concepto de álgebras lineales asociativas, las cuales incluyen como casos particulares el álgebra ordinaria, los vectores y los cuaterniones.

Proponemos a continuación unas actividades tipo para alumnos de la escuela obligatoria, utilizando el recurso didáctico que supone el conocimiento del desarrollo histórico del álgebra:

Objetivo: Resolver ecuaciones de segundo grado.
Nivel: 13-15 años.
Actividad: Existen diferentes métodos para encontrar soluciones de ciertas ecuaciones de segundo grado, uno de ellos es el método geométrico utilizado, entre otros, por Al-Khwarizmi, matemático árabe del siglo IX, asociado a un problema de medida de áreas.

Así, por ejemplo, para encontrar una solución de la ecuación $x^2 + 12x = 64$, se procede de la manera siguiente:

- Alrededor de un cuadrado de lado x (cuyo valor se desconoce) se construyen cuatro rectángulos de lados x y 3 (obsérvese que 3 es la cuarta parte de 12, coeficiente de x) (Fig. 1).
- Cada rectángulo rayado de la figura tiene un área de $3 \cdot x$.
- El área del cuadrado pequeño que está en el centro (con cuadrículas) es igual a x^2.
- El área total de la zona rayada vale $x^2 + 12x$.
- x es la solución de la ecuación si, y solamente si, esta área es igual a 64. Por otra parte, para obtener el área del cuadrado grande hay que añadir a las zonas rayadas, $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (los cuatro cuadrados esquinas de lado 3).

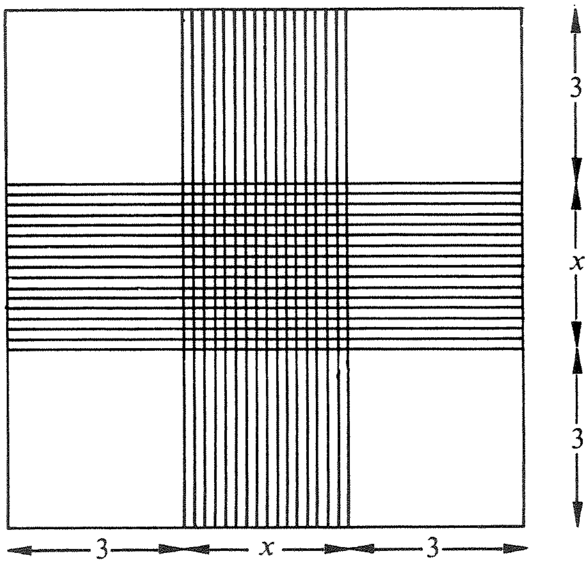


Fig. 1.

— El área total del cuadrado grande será:

$$64 + 36 = 100$$

y, por tanto, su lado será 10.

Con ayuda de x también podemos expresar el lado del cuadrado grande como $6 + x$, de donde una solución de la ecuación dada será 4.

— Utilizar el procedimiento de Al-Khwarizmi para encontrar una solución de las ecuaciones:

a) $x^2 + 10x = 39$.
b) $x^2 + 8x = 65$.

Objetivo: Resolver ecuaciones diofánticas.
Nivel: 14-16 años.
Actividad: Uno de los métodos para resolver ecuaciones diofánticas se basa en el procedimiento ideado por Euler que vamos a aplicar a la resolución del siguiente problema:

«Si se compran fascículos de 680 y 760 ptas. cada uno, y se ha pagado un total de 11.760 ptas., ¿cuántos fascículos hemos adquirido de cada precio?»

Si llamamos x al número de fascículos de una clase e y al número de fascículos de la segunda clase, se tiene la ecuación:

$$680x + 760y = 11.760$$

Para resolverla se busca primeramente una solución particular despejando la incógnita de coeficiente más pequeño:

$$x = 17 - y + \frac{5 - 2y}{17}$$

Además, como x, y son números enteros, llamaremos t al valor que tomará $\frac{5 - 2y}{17}$, es decir,

$$t = \frac{5 - 2y}{17}$$

que despejando la y, se tiene

$$y = -8t + 2 + \frac{1 - t}{2}$$

$y \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{Z}$, entonces $t = -1$, luego, sustituyendo este valor en la expresión dada de x, se tendrá que $x = 5$

$x = 5$ fascículos de una clase
$y = 11$ fascículos de la otra clase

Si se tiene en cuenta que la solución general es

$$x = 5 + 19k$$
$$y = 11 - 17k$$

y que $x > 0$; $y > 0$, no existen más soluciones que para el valor $t = 0$.

— Utiliza este procedimiento para:

a) Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $15x - 130y = 35$.

b) En una escuela de Magisterio, la especialidad de Ciencias tiene un número de alumnos comprendido entre 250 y 300, distribuidos en tres grupos: en el primero hay los 19/35 del total, en el segundo hay 1/14 del total y en el tercero está el resto de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene la especialidad y cada uno de los tres grupos?

EJERCICIOS

1. Empleando el método de Viète, resolver las ecuaciones:

a) $x^2 - 14x + 40 = 0$
b) $x^2 - 14x - 32 = 0$
c) $x^2 + 7x - 60.750 = 0$

2. Utilizando los métodos del álgebra-geométrica de los griegos resolver en las situaciones que sea posible, las ecuaciones

a) $x^2 + 12x - 64 = 0$
b) $x^2 - 12x + 64 = 0$
c) $x^2 - 8x + 64 = 0$
d) $x^2 - 6x - 10 = 0$

3. Demostrar la propiedad asociativa del producto por los métodos de los griegos.

4. Resolver la ecuación $x + 1/2x = 16$ por el método de la *regula falsi.*

5. Hállese la edad de Diophante, tomando los datos del epigrama.

6. Resolver las ecuaciones siguientes utilizadas por los egipcios por el método de la «falsa posición» o *regula falsi.*

a) $x + \frac{1}{6}x = 5$

b) $x + 2x = 8$

c) $x - \frac{1}{5} = 24$

d) $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x = 10$

e) $x + 3x + 5x = 30$

f) $x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{7}x = 4$

7. Fórmese la ecuación cúbica cuyas raíces son $1 \pm \sqrt{3}$ y -3 y aplíquese el método de Cardano.

8. De Morgan propuso el siguiente acertijo: «En el año x^2 tenía x años.» Resolverlo.

9. Resolver las ecuaciones siguientes utilizando el «método de la doble falsa posición» o «método de las escalas».

a) $2x - 5 = 0$

b) $\frac{x}{2} + 3 = 0$

c) $\frac{x - 3}{2} - 1 = 0$

d) $\frac{2x + 3}{5} - 2 = 4$

10. Resolver las ecuaciones de segundo grado siguientes por el método de completar cuadrados:

a) $x^2 - 10x = -9$

11. Expresar en lenguaje habitual los pasos del algoritmo que utilizaban los babilonios para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $x^2 + px = q$.

12. Obtener por el método de factorización las soluciones de las ecuaciones cuadráticas siguientes:

a) $x^2 + 7x - 60 = 0$

13. Los babilonios conocían la existencia de valores x, y, z tales que $x^2 + y^2 = z^2$, pero se debe a la escuela pitagórica la solución particular de esta ecuación diofántica:

$$x = 1/2(n^2 - 1) \quad , \quad y = n \quad , \quad z = 1/2(n^2 + 1)$$

con n impar, solución que probablemente dedujeron de la propiedad «todo número impar es diferencia de dos cuadrados». Probar ambas afirmaciones.