Desarrollo histórico del concepto de continuidad

Matemática griega

En la matemática griega existe ya una cierta idea de continuidad; tenían una noción de continuidad en sentido intuitivo, pero no se trataba de la continuidad de funciones, puesto que no existía este concepto.

– Pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes, pero tanto el espacio como el tiempo tienen también otra propiedad, que es más fácil de intuir que definir conocida como continuidad.

– Aristóteles describe el punto pitagórico como una unidad dotada de posición o como una unidad considerada en el espacio.

– Contra esta concepción estaban las ideas de los eleáticos, cuyo principio fundamental era la unidad y permanencia del Ser :

Paradojas de Zenón, (imposibilidad del movimiento):

i) la de la dicotomía,

ii) la de Aquiles y la tortuga,

iii) la de la flecha,

iv) la del estadio.

La noción de continuidad estaba implícita en las respuestas a estas paradojas.

Edad Media

Nicole Oresme está necesariamente asociado al concepto de función durante la Edad Media.

> *Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar cono una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo.*

En su idea primitiva de representación gráfica de funciones, Oresme dibuja una gráfica velocidad–tiempo que es continua. La continuidad aparece como una propiedad global de las magnitudes medibles.

Siglo XVII

– Aritmetización de la geometría, lo que va a influir en la idea de continuidad.

– Se pasa de la concepción geométrica intuitiva de la noción de función a una concepción algebraica gracias a los trabajos de Descartes (1596–1650) y Fermat (1601–1665). Las funciones se representan por fórmulas analíticas y la mayor parte de ellas corresponden a trayectorias de un móvil.

– Descartes, la noción de continuidad toma un carácter geométrico ligado a las curvas.

– Newton (1643–1727) la noción de continuidad continúa siendo geométrica y está ligada al tiempo.

– Leibniz(1646–1716) la continuidad toma un carácter espacial.

Siglo XVIII

Euler (1707–1783)

– Funciones continuas: aquellas en las que todos sus valores están ligados por una misma ley o dependen de la misma ecuación, es decir, las que están definidas por una sola expresión analítica.

– Funciones discontinuas o mixtas son las que están definidas por diferentes expresiones en diferentes intervalos del dominio de la variable; nuestras actuales funciones continuas con puntos angulosos serían discontinuas en el sentido de Euler.

– En definitiva, para Euler el concepto de continuidad está enraizado en la idea de fórmula algebraica.

– De acuerdo con El Bouazzoui (1988) la idea euleriana de continuidad es adecuada para las funciones numéricas de la época. Las funciones continuas son estudiadas en análisis y geometría para la integración de ecuaciones conteniendo diferenciales de funciones de dos o más variables mientras que las discontinuas intervienen únicamente para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales.

– Esta concepción de la continuidad llega a ser fuente de errores: la solución obtenida por Daniel Bernouilli para el problema de la cuerda vibrante como suma de una serie de senos y cosenos debería ser continua y sin embargo es discontinua ; en general, la suma de una serie de funciones continuas puede no ser continua.

Lagrange (1736–1813)

– Primera definición por comprensión de la continuidad. Al considerar el desarrollo en serie entera de la función f (x + i), define implícitamente la continuidad de la siguiente manera

> *Se podrá encontrar una abcisa i correspondiente a una ordenada menor que una cantidad dada, y entonces todo valor más pequeño de i corresponderá también a ordenadas menores que la cantidad dada* (citado en El Bouazzoui (1988) p. 80).

Siglo XIX

– Se encuentran funciones, a las que aplicando la definición de continuidad, en el sentido de Euler, presentan contradicciones. Por ejemplo la encontrada por Cauchy en 1844:

$y = x$ si $x \leq 0$ $y = -x$ si $x \geq 0$

Esta función es discontinua en el sentido de Euler pues está definida por dos expresiones. Sin embargo, puede representarse por una sola expresión $y = \sqrt[2]{x^2}$ para todo número real x por lo que será continua. La distinción entre funciones continuas y mixtas entraña, por consiguiente, contradicciones.

– Bolzano (1781–1848), el primero en dar una definición de continuidad desligada de las consideraciones geométricas, espaciales y temporales de sus predecesores.

> *Decir que una función real f de la variable real x es continua, para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo dado, no significa otra cosa que esto: si x es un tal valor cualquiera, la diferencia f(x–w)– f(x) se hace más pequeña que cualquier cantidad dada si se toma w tan pequeña como queramos* (Dugac, 1981, p.16)

En sus trabajos Bolzano demostrará con rigor las propiedades fundamentales de las funciones continuas. Por vez primera el concepto de continuidad toma la forma de definición matemática.

Cauchy (1789–1857)

Definición de continuidad (1821)

La función f(x) es continua con respecto a x entre los límites dados si, entre estos límites un crecimiento infinitamente pequeño de la variable, produce también un crecimiento infinitamente pequeño de la función misma

(Aparecen las palabras infinitamente pequeño , que intuitivamente se sabe lo que es, pero que no está precisado en la definición)

– Weierstrass (1815–1897).

– Es el primero en dar a conocer un ejemplo de una función continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos, aunque ya Bolzano había puesto un ejemplo de este tipo de funciones.

– Weierstrass da una definición de continuidad desligada de ciertas ideas intuitivas de crecimientos infinitamente pequeños, de variable aproximando un límite, que estaban presentes en las definiciones anteriores.

$f(x)$ es continua en ciertos límites de x si para todo valor x_0 en este intervalo y para todo número positivo ε arbitrariamente pequeño, es posible encontrar un intervalo de x_0 tal que para todos los valores de este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto inferior a ε.

Siglo XX

Con los trabajos de Cantor (1845–1918) y Dedekind (1831–1916) comienza el gran desarrollo de la topología, correspondiendo a Hausdorff(1868–1942) la noción de espacio topológico y a Fréchet la de espacio métrico. Hausdorff definirá el concepto de continuidad de la siguiente manera :

> *Una transformación continua significa que a cada punto del primer espacio hay asociado un único punto del segundo espacio y que dado un entorno de una imagen de un punto existe un entorno del punto origen (o de cada punto origen si hay varios) cuya imagen está contenida en el entorno de dicho punto imagen.*