Desarrollo histórico del concepto de límite

DESARROLLO HISTORICO

- En la matemática griega no se puede considerar la noción de límite funcional, puesto que no existía el concepto de función. Sin embargo, al resolver problemas relativos al cálculo de áreas se producen ciertos procesos iterados que constituyen un primer germen de este concepto. Como ejemplo, se pueden considerar el método de Hipócrates de Chíos (hacia 430 a.C.) para probar que la razón de las áreas de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de los radios, y el método de exhaución de Eudoxo (s. IV a.C.).

- Es a partir del s. XVII cuando los matemáticos tratan de resolver problemas en los que está implícito el concepto de límite, por ejemplo, Cavalieri (1598?-1647), Fermat (1601-1665), y Newton (1643-1727).

Siglo XVII

Algunos de los problemas que se tratan de resolver son los siguientes:

– Encontrar los límites de elementos geométricos (secantes a una curva que pasan por un punto fijo a la curva, polígonos inscritos en un círculo,etc.)

– Medir las magnitudes y los elementos *diferenciales* asociados a las curvas y superficies (tangentes, radios de curvatura, asíntotas, máximos y mínimos).

– Calcular las formas indeterminadas

– Evaluar el orden de las magnitudes de sumas parciales de series divergentes o de restos de series convergentes

Método de los indivisibles

Cavalieri (1598?– 1647) formuló un método original, que se conoce como el método de los indivisibles:

Consiste en considerar como indivisibles a los elementos que constituyen una figura de dimensión mayor: los puntos son los indivisibles de un segmento; los segmentos, de figuras planas; las secciones planas, de sólidos. Entonces, para hallar por ejemplo el volumen de un cilindro, se descompone en una infinidad de cilindros de altura infinitamente pequeña, mediante un haz de planos paralelos y la suma de todos esos cilindros será el volumen del cuerpo pedido.
Aunque este método fue criticado, en un principio, por los matemáticos de su tiempo (véase, por ejemplo, la de Tacquet en su obra *Quatuor cylindricorum et annulorum...*), acabó siendo utilizado por todos.

El problema de la suma de una serie

Uno de los principales problemas que ha nutrido la reflexión sobre el límite es el cálculo de la suma de una serie.

– Arquímedes había calculado la suma de la serie $1/4^n$

– Oresme la de $1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \ldots\ldots\ldots$; también obtuvo la divergencia de la serie armónica.

– En el siglo XVII las series intervienen masivamente ; Saint Vincent (1584–1667) fue el primero en aplicar las series a resolver las paradojas de Zenón de Elea; resolvió el problema del encuentro de Aquiles con la tortuga. Utilizó la palabra **terminus** para hablar del límite y para él el límite era un obstáculo, un muro infranqueable, que era imposible de trspasar.

– Mengoli (1626–1686) clacula la suma de la serie armónica alternada.

– Gregory (1638– 1675) comienza a desarrollar ciertas funciones en serie ; introduce la idea de convergencia que importa de la óptica.

Todos estos **cálculos** comienzan a dar lugar a una reflexión sobre la **propia idea de límite**

Máximos y mínimos

Fermat (1601–1665) crea un método para resolver problemas de máximos y mínimos mediante un procedimiento puramente algebraico

Ante el problema de dividir un segmento de longitud a en dos segmentos x y a–x cuyo producto $x(a-x) = ax-x^2$ sea máximo, Fermat reemplaza x por x+e

$a(x+e) - (x+e)^2 = ax + ae - x^2 - 2xe - e^2$ y esto debe ser poco diferente de $ax - x^2$; de donde

$ae - 2xe - e^2 \simeq 0$ $\quad a \simeq 2x + e$, es decir

$a \simeq 2x$, luego $x \simeq \frac{a}{2}$

No habla del paso al límite, su razonamiento es puramente algebraico, pero aquí hay un germen de la noción de límite y de derivada.

Visión cinemática (Newton)

– Newton tiene una visión cinemática del análisis. En su *De quadratura curvarum*, afirmará

> *No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes todo lo pequeñas que se quieran, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos; las superficies, por el movimiento de líneas; los sólidos, por el movimiento de las superficies; los ángulos, por la rotación de sus lados; los tiempos, por un flujo continuo; y así sucesivamente*

Su idea es asimilar las cantidades variables a cuerpos en movimiento, las variables x e y son cantidades que van fluyendo, de las cuales salen las fluxiones p y q o velocidades de variación ; para ello utiliza, en un principio los infinitamente pequeños,que trata de evitar posteriormente en su obra *De quadratura curvarum*, donde sustituye las cantidades fluentes por la teoría de las llamadas *razones primera y última*, hablando de la razón primera de los incrementos nacientes o la razón ultima de incrementos evanescentes.

Razón última (Newton)

Si se cambia x por $x+o$ ¿cuál es la tasa de variación de x^n?

Se tiene

$$(x+o)^n - x^n = n o x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots$$

La razón de la tasa de variación de x^n respecto de x, es entonces

$$\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o x^{n-2} + \cdots$$

De donde "haciendo que o llegue a ser muy pequeño", obtenemos $n x^{n-1}$

Newton llama a este valor la razón última.

Newton, precisa, que si bien la razón de las dos cantidades tiende a cero, no se trata de la razón 0/0, sino del límite de la razón

Las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales las razones de las cantidades decrecientes sin límite se aproximan también, y hacia las cuales pueden aproximarse tanto como cualquier valor dado, pero que no pueden pasarlas o alcanzarlas antes de que las cantidades sean disminuidas indefinidamente (Opera Omnia, citado en Cornu (1983) p.46)

El interés de Newton está en la razón de las cantidades, que se aproxima a un límite cuando las dos cantidades tienden a cero, esto es, la derivada no es una aplicación del concepto de límite sino que el cálculo de derivadas es el que ha conducido hacia este concepto.

La reacción (Berkeley)

Un punto puede ser el límite de una línea, una líneas pueda ser el límite de una superficie; Un instante puede ser el límite del tiempo. Pero ¿cómo puede concebirse una velocidad por medio de tales límites? Una velocidad depende del tiempo y del espacio y no puede concebirse sin ellos. Y si las velocidades de las cantidades nacientes o que se esvanecen, es decir sin relación entre el tiempo y el espacio, no pueden ser comprendidas, como se puede comprender y mostrar su relación, ¿dónde considerar su razón primera y última?. Pues, considerar la razón de dos cosas supone que esas cosas ean una magnitud, y que esta magnitud pueda ser medida (The Analyst, p. 31)

Siglo XVIII (despojar al análisis de su metafísica)

D´Alembert insistirá, en la misma línea que Berkeley, en que hay que despojar al cálculo de su metafísica :

> *Quería sabe qué idea clara y precisa se puede esperar que surja en el espíritu por una definición parecida. Una cantidad es algo o nada; si es algo, nos se ha desvanecido; si no es nada está desvanecida totalmente. Es una quimera pensar en un estado intermedio entre los dos anteriores* (citado en De Lorenzo (1971), p.121)

Límite de la *Enciclopedia* escribe :
una magnitud es el límite de otra magnitud variable si esta segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que una cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)

Lagrange en su obra *Théorie des fonctionas analytiques* trata de desarrollar el Cálculo de modo que sea más riguroso para lo que ensaya desembarazarse de los infinitamente pequeños . Lagrange es uno de los principales artífices en el paso al dominio numérico aplicando posteriormente sus resultados a la geometría y a la mecánica.

A prtir de Lagrange, la práctica del cálculo se desarrolla considerablemante y el paso al dominio numérico s eefectúa totalmente; Fourier, Poisson y Gauss son sus principales artífices. Gauss ya tiene una idea bastante clara de la noción de límite y en 1800 define las nociones de cota superior, cota inferior, límite superior e inferior.

Siglos XIX y XX

Cauchy (1789–1857)

Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproxima indefinidamente a un valor fijo de manera que terminan de diferir de él tan poco como queramos este último valor se llama el límite de todos los demás (Cauchy, 1821, p.4)

Además da la definición de infinitésimo como lo consideramos actualmente, es decir como una función cuyo límite es cero, superando de este modo la consideración que se hacía hasta entonces de infinitésimo como un número constante muy pequeño

Diremos que una variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia límite cero

Weierstrass (1825–1897)

Si dado cualquier ε*, existe un* η_0 *tal que* $0 < \eta < \eta_0$ *la diferencia* $f(x + \eta) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε *se dice que L es el límite de* $f(x)$ *para* $x = x_0$ (citado en Boyer(1986), p.696)

Definición que llega hasta nuestros días, con el pequeño cambio de la η por la δ. Posteriormente se introducirá la definición topológica y métrica que traduce la anterior.

Resumiendo, podemos considerar las siguientes concepciones:

- La concepción de los matemáticos hasta finales del siglo XVII, con la idea de aproximación mediante procesos geométricos iterados.

- La concepción de Euler y Lagrange, donde la atención se centra exclusivamente en los aspectos relacionales de la función sin tener en cuenta los entornos.

- La concepción de D'Alembert y de Cauchy, que está relacionada con la idea de "aproximarse". Tanto en la definición de D'Alembert como en la de Cauchy se expresa el concepto de límite como "cantidades variables que se aproximan a una fija difiriendo de ella en menos de una cantidad dada" aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable.

- La concepción de Weierstrass, que corresponde al proceso de aritmetización del análisis.

- La concepción topológica de Hausdorff.