Concepto de función : síntesis de su desarrollo histórico

Desarrollo histórico del concepto de función

1.- La Antigüedad : hacia una búsqueda de regularidades y proporciones.

2.- La edad Media : representación cinemática y geométrica de las relaciones funcionales.

3.-Siglos XV y XVI : el desarrollo de la notación algebraica.

4.- Siglo XVII : introducción a la representación analítica.

5.- Siglo XVIII : el concepto de función como objeto matemático.

6.-Siglo XIX : la idea de correspondencia arbitraria.

7.-Siglo XX : el concepto de función como terna.

i) Edad antigua

Los matemáticos babilónicos, como es bien conocido, estaban ante todo interesados en los cálculos astronómicos, utilizando para ellos tablas que solían estar dispuestas en dos columnas, lo que ha llevado a algunos autores como Pederson (1974) a afirmar que poseían un cierto sentido de la funcionalidad ; sin embargo otros autores como Youschkevich (1976) afirman que en la antigüedad no existió una idea general del concepto de función. De todos modos hay que señalar que los babilonios no se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos sino que usaron interpolaciones tanto lineales como geométricas, buscando regularidades.

Por lo que se refiere a la matemática griega, hay dos asuntos que la determinan. En primer lugar, la distinción entre número y magnitud: los números o las razones entre enteros positivos se discretizan frente a las magnitudes que permiten expresar la continuidad lo que repercute sobre la idea de magnitud variable, que no puede expresarse mediante números mas que en casos particulares. En segundo lugar, el papel preponderante de las proporciones que los griegos establecían siempre de modo homogéneo, lo que llevaba a comparar longitudes con longitudes, áreas con áreas y volúmenes con volúmenes, lo que impedía ir hacia el concepto de función.

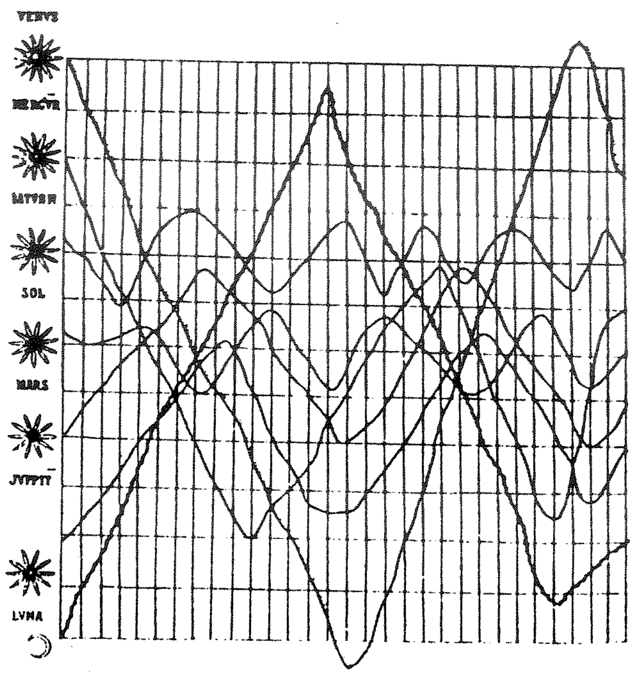


FIGURA 1.1. Primera gráfica funcional conocida.

ii) Edad Media

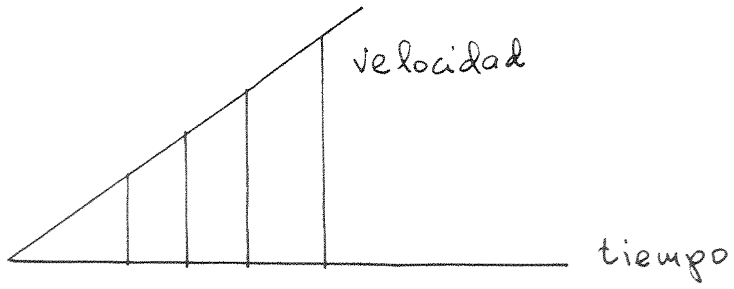
Las escuelas de Oxford y París son dos de los principales núcleos del desarrollo de la ciencia en este periodo. Según señala Crombie (1979), en el siglo XIV se dedicó una fuerte atención a la formulación matemática y cuantitativa de las leyes del movimiento, comenzando a dirigirse la atención del por qué de estos fenómenos al cómo de ellos.

Dos métodos principales para expresar las relaciones funcionales.

-El primero de ellos fue el **álgebra de palabras**, utilizado en la Mecánica por Brawardino de Oxford, en el que se conseguía la generalización empleando letras del alfabeto, en lugar de número, para sustituir las cantidades variable, mientras que las operaciones de adición, división, multiplicación, etc, realizadas con estas cantidades, se describían con palabras en vez de ser representadas con símbolos como en el álgebra actual.

- El segundo fue a través de un método geométrico por medio de gráficas. Los griegos y árabes utilizaron algunas veces el álgebra en conexión con la geometría, y la idea de describir la posición de un punto respecto de coordenadas rectangulares fue familiar a los astrónomos y geógrafos desde los tiempos clásicos.

- En esta época hay que señalar las aportaciones de Nicolás Oreme (1323-1382) con la introducción temprana de coordenadas



Con este tipo de representaciones, que nos recuerda mucho ya lo que llamamos la representación gráfica de una función sobre unos ejes cartesianos, Oresme pretende que se entienda mas fácil y más rápidamente la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitaivos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos .

iv) Siglo XVII

Tres factores, según Youschkevitch (1976), favorecieron el desarrollo del concepto de función :

- el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos,
- la creación del álgebra simbólico-literal
- la extensión del concepto de número.

Pero es fundamentalmente Descartes quien habla explícitamente de relaciones funcionales :

" Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva " (citado en Boyer (1986), p.437)

Como señalan Azcárate y Deulofeu (1990)

" .en 1637, Descartes publica su célebre trabajo, La Geometrie, libro que marca el nacimiento y expansión de la geometría analítica, que permitirá, a a partir de este momento, interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones, y que un siglo más tarde llevará a la algebraización de la geometría. Esta idea fundamental, afectará igualmente de forma decisiva a las funciones, ya que en este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de **que una ecuación en *x* e *y* es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables,** de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que correspondan a determinados valores de la otra" (Azcárate y Deulofeu, 1990, p.47).

3.- Siglo XVIII

La primera mención explícita de función como expresión analítica aparece en un artículo de **J. Bernouilli** en 1718, según señala Boyer (1986)

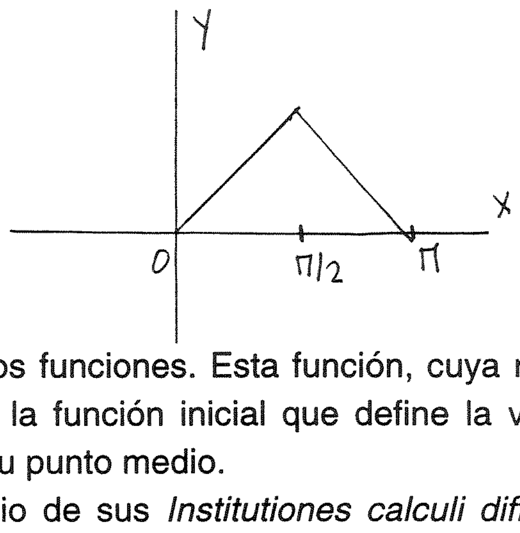
" Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes" (p.531)

Posteriormente, **Euler** (1707-1783) desarrollará de un modo más profundo el concepto de función . En el Capítulo 1º de su *Introductio in analysis infinitorum* define una función como

"una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes".

La resolución del problema de la cuerda vibrante le llevó a la necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas: las “funciones arbitrarias”. Así, definió como arbitrarias funciones del tipo

$y = x$ en $[0, \pi/2]$
$y = \pi - x$ en $[\pi/2, \pi]$



compuesta por trozos de dos funciones. Esta función, cuya representación es poligonal, es precisamente la función inicial que define la vibración de la cuerda sonora al pulsarla por su punto medio.

De este modo en el prefacio de sus *Institutiones calculi differentialis* , de 1755, aparece la nueva definición : Si x es una cantidad variable , entonces toda cantidad que dependa de x **de cualquier manera** o que esté determinada por aquel se llama una función de dicha variable.

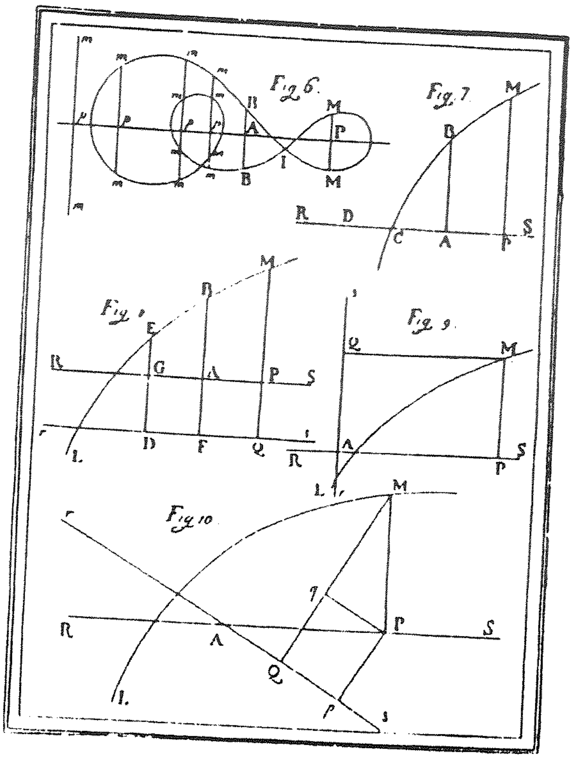


FIGURA 1.11. Originales de Euler en su *Introductio in annalysis infinitorum* para explicar las ecuaciones de cambio de ejes de la curva CBM.

Lagrange (1736-1813) escribió dos grandes tratados sobre funciones : *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el Cálculo de las funciones.* Dió la siguiente definición de función

"Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otra cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que puedan estar mezcladas" (citado en Grattan - Guinnes (1984), p.33)

VI) Siglo XIX

El concepto de función se fue convirtiendo poco a poco en el concepto clave del nuevo Análisis, refinándose progresivamente este concepto. Van apareciendo así las siguientes definiciones :

Cauchy (1827)
" Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable " (citado por Youschkevitch , 1976 ,p. 58) .

Dirichlet (1837)
" Si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y* , entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente *x* " (citado en Boyer (1986), p. 687). Dirichlet dio un ejemplo de caso extremo : " La función que asocia un valor dado *c* a cualquier *x* racional y un valor dado *d* a cualquier *x* irracional ". Esta función tiene tan ' mal comportamiento ' que es discontinua para todos los valores de *x*.

Riemann (1858)
Se dirá que *y* es función de *x* si a todo valor bien determinado de *x* corresponde un valor bien determinado de *y* cualquiera que sea la forma de relación que une a *x* y a *y* .

VII.- Siglo XX: El concepto de función como terna

Se llama función a la terna

$$f = (G, X, Y)$$

en que G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

i) $G \subset X \times Y$

ii) Para todo $x \in X$, existe un y y sólo un $y \in Y$, tal que $(x,y) \in G$