El modelo de desarrollo del pensamiento geométrico según Van Hiele

El modelo Van Hiele de pensamiento geométrico surgió de los trabajos doctorales (leídos en 1957) del matrimonio Van Hiele, completados simultáneamente en la Universidad de Utrecht. Como Dina murió poco tiempo después de su examen doctoral, fue Pierre quien elucidó, depuró, corrigió y llevó adelante la teoría. Con excepción de Unión Soviética, donde el currículum de geometría fue revisado en la década de 60 conforme al modelo Van Hiele, el trabajo fue ganando lentamente la atención internacional. A partir de los 70, un norte americano, Izaac Wirszup (1976), empezó a escribir y hablar sobre dicho modelo. Casi al mismo tiempo, Hans Freudenthal, el profesor de los Van Hiele en Utrecht, llamó la atención por sus trabajos en su libro "Las matemáticas como una obra educacional" (1973).

En los años 50 del siglo pasado, los esposos Van Hiele, trabajan como profesores de Geometría de la escuela secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente elaboraron el modelo, presentado en dichas tesis doctorales. Los componentes principales de este modelo son: teoría de los niveles de razonamiento que explica como se produce el desarrollo en la calidad del conocimiento geométrico del alumno/a al abordar la Geometría; y las fases de aprendizaje, que constituyen su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades de enseñanza aprendizaje en el aula (Vílchez González, 2004).

Durante la década de 80, se incrementó el interés de norteamericanos en las contribuciones del matrimonio Van Hiele, particularmente debido a las traducciones al inglés, efectuadas en 1984, de algunos de los principales trabajos de la pareja (Crowley, 2005). Además, según Vílchez González (2004), este modelo de estratificación del conocimiento ha sido validado por extensos estudios de psicólogos soviéticos y actualmente está siendo utilizado y recomendado por sociedades de profesores, como la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1987,1989, 2000) en EEUU, la Sociedad Andaluza en la Enseñanza de las Matemáticas y la Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas en España ('NCTM, 1991,1993).

1 - Los niveles del modelo

El modelo explica al mismo tiempo cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo es posible ayudar a los alumnos a mejorar la calidad de su razonamiento, y está conformado por cinco niveles de entendimiento que describen características del proceso de pensamiento: (1) "visualización", (2) "análisis", (3) "deducción informal", (4) "deducción formal" y (5) "rigor". Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en él se afirma que el aprendiz se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización), donde el espacio es simplemente observado - las propiedades de las figuras no son reconocidas explícitamente - a través de la secuencia anteriormente enlistada hasta el más alto (rigor), el cual se relaciona con los aspectos abstractos formales de la deducción. Algunos estudiantes son expuestos al último nivel, o tienden a él.

Los conceptos implícitamente comprendidos en un nivel llegan a ser explícitamente comprendidos en el siguiente. Por ejemplo, las figuras son reconocidas visualmente en el primer nivel por sus propiedades implícitas, propiedades que se hacen explicitas en el segundo nivel. Además, cada nivel tiene su propio lenguaje. Por ejemplo, en el segundo nivel, si un cuadrilátero es un cuadrado, no es un rectángulo; en el tercero, sí.

Nivel 0 (nivel básico): visualización

En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales, como algo provisto de componentes o atributos. Las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades. Una persona que funciona a este nivel puede aprender un vocabulario geométrico, identificar formas especificadas y, dada una figura, reproducirla. Por ejemplo, dado un diagrama con figuras de cuadrados y rectángulos (Figura 1.1), a un estudiante en este nivel, le sería posible reconocer que hay cuadrados y rectángulos porque son similares en sus formas a cuadrados y rectángulos con los que se ha encontrado previamente.

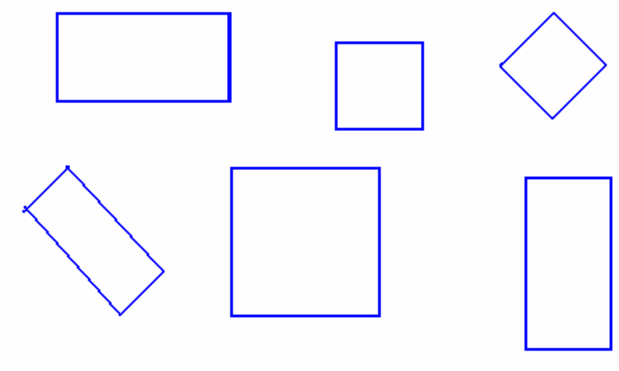

Figura 1.1 - Cuadriláteros

Una persona en esta etapa, sin embargo, no reconocería que las figuras tienen ángulos rectos o que los lados opuestos son paralelos.

El razonamiento es dominado por la percepción: "*no hay por qué, uno simplemente lo dice*" (Van Hiele, 1986, p.83). Durante la transición al nivel descriptivo, las clases de figuras comienzan a ser asociadas con sus propiedades características.

Nivel 1: Análisis/Descriptivo

En el nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. La forma retrocede y surgen las propiedades de las figuras. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas. Es notorio que las figuras tienen partes y son reconocidas mediante ellas. Dados paralelogramos como los de la figura 1.2, los estudiantes podrían, identificando los ángulos iguales, "establecer" que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales. Después de usar varios de tales ejemplos, los estudiantes pueden hacer generalizaciones para la clase de paralelogramos.

Las relaciones entre propiedades, sin embargo, aún no pueden ser explicadas por los estudiantes en este nivel, en el cual todavía no se ven las interrelaciones entre las figuras, ni se entienden las definiciones.

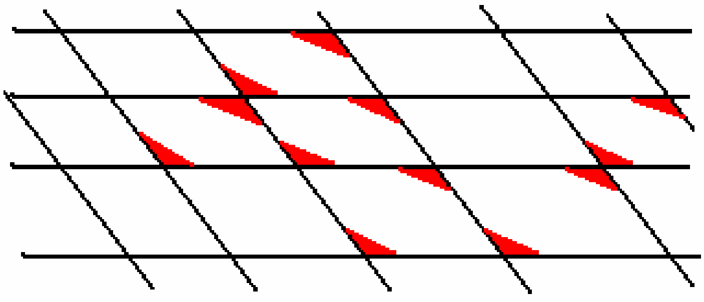

Figura 1.2 – Ángulos opuestos del paralelogramo

Nivel 2: Deducción informal/Abstracto/Relacional

Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades).

Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares.

Nivel 3: Deducción formal

En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica o un sistema de axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones son captadas. Una persona puede construir, y no nada más memorizar, demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distinguir entre una afirmación y su recíproca.

Los alumnos organizan sucesiones de enunciados que les permiten deducir un enunciado a partir de otro (por ejemplo, para mostrar que el postulado de las paralelas implica que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º). Pero no reconocen la necesidad del rigor y no alcanzan a comprender las relaciones entre varios sistemas deductivos.

Nivel 4: Rigor

En esta etapa el aprendiz puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Los alumnos analizan diversos sistemas deductivos con un grado de rigor. Los alumnos comprenden las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados.

Subrayamos aquí las ideas de Fischbein (1993), donde él defiende una de las propiedades que caracteriza las formas geométricas y que además, está relacionada con su naturaleza conceptual: las propiedades de las figuras geométricas son impuestas por o derivadas de definiciones en el dominio de un cierto sistema axiomático. Desde este punto de vista, una figura geométrica tiene una naturaleza conceptual. Por ejemplo una esfera no es una imagen representada por sus proyecciones en una hoja de papel o en una pantalla de ordenador. Es una forma controlada por una definición (aun cuando inspirada en un objeto real). Una esfera es un elipsoide de revolución cuyos ejes son iguales y cuyos focos coinciden con el propio centro de la superficie. Partiendo de esas propiedades uno puede seguir descubriendo otras propiedades de la esfera (diámetros iguales, ejes de simetría, etc.). Tales ideas se pueden sumar a la ideas de los niveles de desarrollo de Van Hiele respecto a la subordinación que los niveles siguientes tienen de los niveles anteriores, pues el reconocimiento inicial (visual) de las formas evoluciona a partir de la asimilación del concepto.

Además, Fischbein (1993) plantea la idea de que una figura geométrica puede ser descrita como poseedora de propiedades *intrínsecamente* conceptuales. No obstante, una figura geométrica no es un mero concepto. Es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen, a saber, incluye la representación mental de propiedad espacial. Una vez más, encontramos la idea de subordinación de los niveles respecto al intrínseco vínculo visualización-definición. Pero, aquí una visualización más amplia, una visualización mental.

Para avanzar en el desarrollo de los niveles, la imagen visual (física) es imprescindible para apoyar el concepto y a la vez dicha imagen evoluciona apoyada en este mismo concepto pues se amplia. El estudiante no solo se apoyará en el aspecto visual sino que visualizará la imagen a partir de las propiedades que son impuestas por el concepto.

Para Fischbein (1993), los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales, llamadas por él *conceptos figurales*[1], que reflejan propiedades espaciales

[1] Fishbein define el concepto figural como una realidad mental, como el constructo manejado por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial (como color, peso, densidad, etc) pero exhibe propiedades figurales.

(forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad y perfección.

2 - Propiedades del modelo

Además de proporcionar nociones sobre las ideas que corresponden específicamente a cada nivel de pensamiento geométrico, el matrimonio Van Hiele identificó algunas generalidades que caracterizan al modelo (Crowley, 2005):

1. Secuencial - como en la mayoría de las teorías sobre el desarrollo, una persona debe avanzar en orden a lo largo de los niveles. Para desempeñarse con éxito en un nivel particular, un aprendiz debe haber asimilado las estrategias de los niveles precedentes;
2. Ascenso - pasar o no de un nivel a otro depende más del contenido y los métodos de instrucción recibidos que de la edad. Ningún método de instrucción lleva a un estudiante a saltar un nivel, algunos incrementan los progresos, mientras que otros retardan o incluso previenen un movimiento entre niveles. Van Hiele indica que es posible enseñar "a un alumno aventajado, habilidades arriba de su nivel actual". En el caso de la geometría, los ejemplos incluyen la memorización de una fórmula para obtener un área o relaciones como "un cuadrado es un rectángulo". En situaciones como ésas, lo que realmente sucede es que el objeto de conocimiento se reduce a un nivel básico más bajo y la comprensión no ha ocurrido;
3. Intrínseco y extrínseco - los objetos inherentes a un nivel se convierten en objetos de estudio en el siguiente. Por ejemplo, en el nivel 0 sólo la forma de una figura es percibida. Está, por supuesto, determinada por sus propiedades, pero sólo cuando se alcanza el nivel 1 la figura es analizada y sus componentes y sus propiedades son descubiertos;
4. Lingüístico – "cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones para conectar esos símbolos". Así, una relación que es "correcta" en un nivel puede ser modificada en otro (la inclusión de un grupo, por ejemplo, un cuadrado es también un rectángulo, y un paralelogramo). Un estudiante en el nivel 1 no concibe que esta clase de anidado puede darse realmente. Este tipo de nociones y su lenguaje correspondiente, sin embrago, son fundamentales para el nivel 2;
5. Falta de concordancia - si un estudiante está en un nivel y la instrucción que recibe en otro, el aprendizaje y el progreso deseado pueden no ocurrir. En particular si el maestro, los materiales instruccionales, el contenido, el vocabulario y demás aspectos, están en un nivel más lato, al estudiante no le será posible seguir el proceso de pensamiento empleado.

También aquí, las ideas de Fischbein (1993) no se alejan de las de los Van Hiele, sino que se complementan, pues él considera 3 categorías de entidades mentales cuando se refiere a figuras geométricas: la definición, la imagen (basada en la experiencia perceptiva-sensorial, como la imagen de un dibujo) y el concepto figural. El concepto figural, como ya hemos visto, es una realidad mental y es un constructo manejado por el razonamiento en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial pero exhibe propiedades figurales.

Al avanzar en el desarrollo de los niveles, los alumnos pasan a pensar en las formas o entidades geométricas como conceptos figurales, pues la asimilación correcta de tales figuras exigirá que se perciba la imposición del concepto sobre dichas formas.

Asimismo, Fischbein (1993) afirma que se necesita un esfuerzo intelectual a fin de entender que las operaciones matemático-lógicas manipulan sólo una versión purificada de la imagen, el contenido espacio-figural de la imagen. Sin embargo, dichas operaciones se manifiestan, físicamente, como imágenes dibujadas sobre una superficie (papel) o sobre la pantalla de un ordenador. No obstante, el significado queda más allá de la materialidad de la propia palabra o símbolo que lo denomina, de la palabra expresada: el significado es una idea figurada por un complejo de relaciones. "*El concepto figural es también significado. La particularidad de este tipo de significado es que incluye la figura como una propiedad intrínseca*" (p. 08).

El modelo, a la par que visualiza los cinco niveles de conocimiento, propone para cada nivel una secuencia de cinco fases a través de las cuales se puede llegar a lograr el aprendizaje para avanzar de un nivel a otro (Vílchez González, 2004). En el siguiente apartado veremos dichas fases.

3 - Fases del aprendizaje

Van Hiele (1986) afirma que el avance a través de los niveles depende más de la instrucción recibida que de la edad o madurez.

Según Crowley (2005) para llevar a cabo esos principios, Dina y Pierre Van Hiele propusieron cinco fases secuenciales de aprendizaje: (1) interrogación, (2) orientación directa, (3) explicación, (4) orientación libre e (5) integración, donde ellos afirman que la instrucción desarrollada de acuerdo con esa secuencia promueve la adquisición de un nivel, ayudando así al alumno a pasar de un nivel de pensamiento dado al nivel inmediatamente superior.

Fase 1 - Interrogación/Información

En esta etapa, el maestro y los estudiantes llevan acabo conversaciones y actividades acerca de los objetivos de estudio para ese nivel (2). Se hacen observaciones, se plantean preguntas y se introduce el vocabulario específico de cada nivel. Por ejemplo, el maestro pregunta a los estudiantes:"¿Qué es un rombo? ¿Es un cuadrado? ¿Es un paralelogramo? ¿Qué es lo que el tiene en común con un cuadrado (paralelogramo)? ¿Qué diferencias hay entre un cuadrado (paralelogramo) y un rombo? ¿Creen ustedes que un cuadrado podría ser un rombo? ¿Un rombo podría ser un cuadrado? ¿Cómo dirían ustedes eso?..." el propósito de esa actividad es doble, en primer lugar, el maestro aprende qué conocimiento previo tienen los estudiantes acerca del tema y, en segundo, los estudiantes aprenden en que dirección se dará el estudio posterior del mismo.

Fase 2 - Orientación dirigida

Los estudiantes exploran el tema de estudio mediante materiales que el maestro ha ordenado cuidadosamente. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel. Así, la mayoría de los materiales serán tareas breves, diseñadas para lograr respuestas específicas. Por ejemplo, el maestro podría pedir a los estudiantes que usen un geoplano para construir un rombo, con diagonales iguales, para construir otro más grande, para construir un tercero más pequeño. Otra actividad podría consistir en pedir la construcción sucesiva de rombos que tengan respectivamente cuatro, tres, dos, y un ángulo recto.

Fase 3 - Explicación

Al construir sobre sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus expresiones acerca de las estructuras que han estado observando. Aparte de auxiliarlos en el uso de un lenguaje cuidadoso y apropiado, el papel del maestro es mínimo. Es durante esa fase que el sistema de relaciones del nivel comienza a hacerse claro. Continuando con el ejemplo del rombo, los estudiantes discutirían entre ellos y con el maestro qué figuras y propiedades surgieron de las anteriores enlistadas.

Fase 4 - Orientación libre

Los estudiantes se encuentran con tareas más complejas: tareas con muchos pasos, tareas que pueden ser completadas de varias maneras y tareas de final abierto. Ganan experiencia en el encuentro con sus propias maneras de resolver las tareas. Muchas relaciones entre los objetos de estudio se hacen explícitas a los estudiantes mediante la orientación así mismos. Por ejemplo, una actividad como la siguiente: Doble una hoja de papel a la mitad, haga una segunda dobla a la mitad, como se muestra aquí (figura 1.3a). Trate de imaginar que figura obtendría si corta una de las esquinas de la dobla (figura 1.3b).

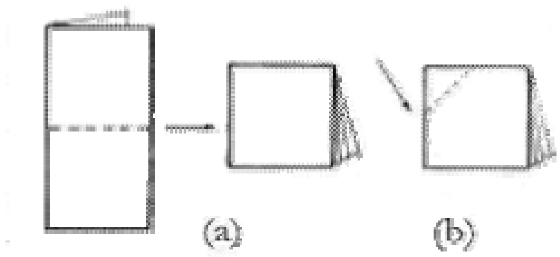

Figura 1.3 – Doblas para obtención de cuadrilátero

Justifique su respuesta antes de cortar ¿Qué tipo de figuras obtiene si hace un corte en la esquina con un ángulo de 30°? ¿Y si lo hace con uno de 45°? Describa los ángulos y el punto de intersección de las diagonales. El punto de intersección, ¿qué es de las diagonales?

Los estudiantes repasan y resumen lo que han aprendido con la meta de formación de un panorama de las nuevas redes de objetos y relaciones. El maestro puede apoyarse en estas síntesis, "proporcionando perspectivas globales" de lo que los estudiantes han aprendido. Es importante, sin embrago, que esos resúmenes no representen algo nuevo. Las propiedades del rombo que han surgido serían resumidas y sus orígenes revisados.
Y al final de la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio de pensamiento reemplaza al viejo y están listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

Algunas de las fases pueden diferenciarse por el tipo de problemas que deben plantearse en ellas. En la fase 1 se pretende que los problemas le ayuden al aprendiz a descubrir el campo del conocimiento y, aunque deben ser sencillos, no se espera que los alumnos, por sí solos, estén con capacidad de resolverlos. En la fase 2 se delimitan los principales elementos (conceptos, definiciones, propiedades) que forman el sistema de relaciones con las que los alumnos deberán razonar. Es necesario que las fases 2, 3 y 4 se realicen en el orden establecido, para conseguir un buen aprendizaje y un adecuado desarrollo de la capacidad de razonamiento. En la fase 4 los problemas deben ayudarle al aprendiz a encontrar su propio camino en el sistema de relaciones y, por tanto, conviene que tengan varias soluciones posibles (Van Hiele, 1986).

En Fischbein (1993), encontramos el testigo de investigaciones donde los resultados muestran una evolución relativamente sistemática de las respuestas desde una representación concreta a una abstracta-conceptual. Sus hallazgos enseñan la complejidad entre los aspectos figurales y conceptuales en la organización de los conceptos figurales y la fragilidad de esa organización en la mente de los estudiantes.

Mariotti & Fischbein (1997) destacan los aspectos favorables de la discusión colectiva en clases, donde los alumnos tienen que confrontar los aspectos de la figura y los conflictos con el concepto, los dos aspectos obran recíprocamente y pueden finalmente armonizarse. En la tentativa de convencer a los compañeros de que sus definiciones estén correctas, se obliga a los estudiantes que hagan su pensamiento explícito, y consigan un control conceptual de la situación.

4 - La geometría dinámica y el papel de la manipulación directa y sus usos en el aprendizaje

Bellemain (2001) propone que las interfaces de manipulación directa deben permitir al usuario construir y manipular los objetos directamente, involucrando conceptos e ideas implícitas en la acciones y retroacciones que favorezcan la acomodación de sus conocimientos y la construcción de nuevos. Tal proceso lleva el aprendiz al desarrollo de sus conocimientos.

Bellemain (2001) nos habla que la geometría dinámica permite considerar y concebir una representación de objetos matemáticos abstractos en varias configuraciones, permitiendo cambiar sus posiciones relativas. La contribución de las implementaciones informáticas es concretar estas acciones en la pantalla del ordenador por medio de la geometría dinámica. La geometría dinámica permite crear un nuevo sistema de representación de los objetos de geometría posibilitando aproximar las propiedades perceptivas de esas representaciones de las propiedades formales de los objetos.

El aspecto dinámico de dicha geometría aparece en la continuidad del desplazamiento de los elementos de un dibujo para cambiar la configuración.

> "*A implementação dos princípios de manipulação direta e engajamento direto necessitam que as intenções do usuário sejam interpretadas pelo software e que essas interpretações produzam "feedbacks" pertinentes para o usuário. É por exemplo o caso da construção da reta, quando a reta segue o "mouse" movido pelo usuário até que ele decida, ajudado pelo feedback contínuo da posição da reta, em que posição ele quer coloca-la*" (Bellemain, 2001, p. 1323).

El autor propone que la reflexión en torno del problema de la comunicación de los objetos del saber, particularmente en la creación de sistemas de representación de estos objetos, se integra en el proceso más amplio de la transposición. En el caso de una adaptación de los objetos del saber a fines educativos, él habla de la transposición didáctica según Chevallard (1985) y cuando el ordenador está involucrado en el proceso de transposición, habla de la transposición informática conforme Balacheff (1994). Añade que la transposición considera varios factores desde el origen material, social y epistemológico, en la transposición del saber.

Añade que

> "*A questão de interpretação das intenções do usuário na implementação do princípio de manipulação direta assume um papel mais relevante quando o usuário é um sujeito em situação de aprendizagem. Assim, é particularmente importante interpretar intenções que resultantes de conhecimentos anteriores para poder favorecer "feedbacks" pertinentes que favoreçam a evolução desses conhecimentos*" (Bellemain, 2001, p. 1324).

Nos habla de la existencia de algunas cuestiones específicas a la creación de sistemas de geometría dinámica. Aunque las soluciones, presentadas por el ordenador, se apoyen en propiedades matemáticas, tales propiedades no son suficientes para determinar las construcciones de geometría dinámica en todos los casos. Los datos de la geometría clásica no son suficientes para que la geometría dinámica funcione. Para la geometría dinámica, es necesario que nuevas reglas sean creadas para la gerencia de los comportamientos de las figuras durante el desplazamiento de los objetos. Dichas reglas son cuestión de coherencia, de continuidad y reversibilidad de los desplazamientos, la consideración de la intención del usuario para que la geometría dinámica produzca los comportamientos deseados. Se trata de implementar el principio de la manipulación directa.

De la idea de la manipulación directa Bellemain (2001) dice que no se trata solo de la elección del usuario de los objetos y operadores sino también de poder efectuar sobre estos objetos ciertas acciones. La manipulación y acción directa actúan como el prolongamiento de la mano del usuario y, en el caso de la geometría, dan la sensación al usuario de manipular directamente los objetos en la pantalla.

La implementación de los principios de manipulación en la pantalla puede permitir la manipulación directa de objetos matemáticos en toda la complejidad y riqueza de la representación de ellos y actuar en función de la intención del sujeto. No se trata solo de permitir la manipulación de objetos matemáticos sino de permitir la manipulación que favorezca la construcción de conocimientos por el sujeto.

La posibilidad de acción directa sobre la pantalla y sobre los objetos geométricos representados crea las condiciones para que el sujeto pueda involucrar en la explotación de una figura, en la resolución de problemas, etc., movilizando conocimientos previos. Dichos conocimientos previos pueden ser fruto de aprendizajes anteriores, adquiridas en la interacción del sujeto con el espacio físico. Además, dichos conocimientos, no son necesariamente explícitos o explicitables en términos geométricos. La posibilidad de explotar modelos geométricos, y matemáticos en general, siguiendo la intención y el intento en la resolución de problemas, es particularmente relevante en el contexto de aprendizaje.

Según el autor se debe hacer la distinción entre figura y dibujo, siendo la figura el objeto teórico, y el dibujo, el objeto material, representación material de la figura. Aun añade que una de las dificultades de la enseñanza de geometría es que el dibujo es en general el objeto de raciocinio del alumno, mientras el profesor aborda la figura. Y que es difícil conducir el alumno a tener una lectura geométrica del dibujo. Defiende que una de las contribuciones de la geometría dinámica a la enseñanza viene del hecho de que ella hace disponible representaciones gráficas de los objetos geométricos que aproximan el objeto material de la pantalla del ordenador (dibujo) del objeto teórico (figura). Dicha geometría favorece el desarrollo para el sujeto de una lectura geométrica del dibujo. Donde considera que la manipulación por el usuario de las representaciones gráficas de la geometría dinámica debe conducirlo a construir conocimientos geométricos.

Fischbein (1993) subraya la necesidad de añadir algunas especificaciones a las figuras geométricas: (a) una figura geométrica es una imagen mental, las propiedades de ella son controladas completamente por una definición; (b) un dibujo no es la figura geométrica en sí, sino una personificación material gráfica o concreta de él; (c) la imagen mental de una figura geométrica es, usualmente, la representación de modelo materializado. La figura geométrica en sí es sólo la idea correspondiente que es la entidad figural abstracta, idealizada y purificada, estrictamente determinada por su definición.

5 - Síntesis del modelo y sus implicaciones en la enseñanza

A partir de las ideas del desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele, consideramos que esta evolución cognitiva del alumno se hace en forma de espiral, o sea, a través de la evolución a los niveles siguientes, tomando como base el nivel anterior. Además, desde las ideas de Vygotski y Freire, creemos que en ese desarrollo influyen (o originan) los aspectos de la interacción con el contenido académico, la interacción socio-cultura y la interacción con los objetos y el entorno. La figura 1.4 enseña tal relación.

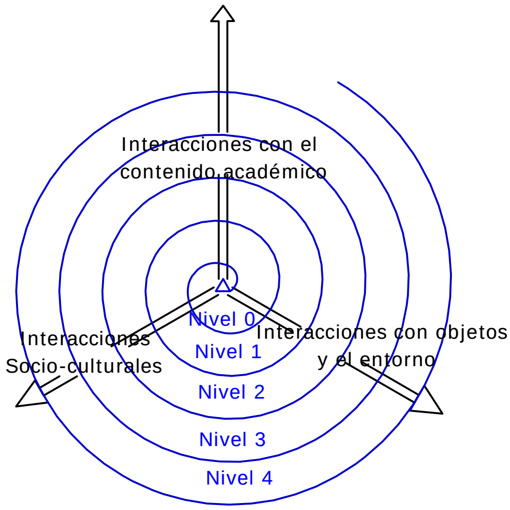

Figura 1.4 – Relación interacciones y desarrollo de los niveles del pensamiento geométrico

En la interacción con el contenido académico están los contenidos impartidos por las instituciones educativas, los contenidos presentados por el libro, el contenido presentado por los medios hipermediáticos, etc.; en la interacción socio-cultural están las relaciones con sus iguales desde su naturaleza humana (maestros, adultos, otros niños, etc.); y en las interacciones con los objetos y el entorno están los objetos que le aportan información táctil y visual sobre las formas y las imágenes de su cotidiano.

Así que dentro de esta visión no sólo la escuela o el profesor favorecen o están implicados directamente en el desarrollo del pensamiento geométrico, sino que las interacciones sociales y el entorno del individuo le aportan conocimiento para que evolucione en dicho desarrollo. También creemos que cuanto más numerosas las oportunidades de interrelación, más se favorecerá al individuo el desarrollo de pensamiento geométrico.

Según Fischbein (1993) figuras conflictivas deben ser utilizadas en las clases para enfatizar el predominio de la definición sobre la figura en el uso y la interpretación del concepto figural. El estudiante debe ser alertado del conflicto y su fuente, a fin de enfatizar, en su mente, la necesidad de contar con el razonamiento matemático en las limitaciones formales.

Fischbein (1993) concluye que los procesos de construcción de conceptos figurales en la mente del estudiante no debería se considerado un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. El maestro y todo lo que influye o puede influir en este proceso educativo deben conducir al desarrollo en los aprendizajes. O sea, las interacciones con el contenido académico, interacciones socio-culturales e interacciones con objetos y con el entorno deben llevar al desarrollo de tal concepto.

Así que, Fischbein subraya que la interacción de propiedades conceptuales y figurales en estructuras mentales unitarias, con el predominio de las limitaciones conceptuales sobre las figurales, no es un proceso natural. Debería constituir una preocupación continua, sistemática y principal para el profesor.

Cuando una entidad geométrica es una imagen, una representación espacial, su existencia y sus propiedades son enteramente impuestas por una definición abstracta y formal. Nada es verdadero figuralmente que no sea verdadero y demostrado conceptualmente y viceversa (Fischbein, 1993). Por tal razón creemos que el nivel (Van Hiele, 1986) siguiente se apoya en el anterior, pues para evolucionar en el conocimiento de la figura el alumno se basará en sus propiedades definidas, y refuerza la idea de que los niveles siguientes estén subordinados a los anteriores.

Las actividades de aprendizajes impartidas en las clases deben tener en cuenta que con la confrontación de impresiones figurales con restricciones formales uno se ayuda a mejorar el control conceptual y, al mismo tiempo, uno estimula la simbiosis entre las restricciones figurales y conceptuales, tal como abogado por Fischbein (1993).

Vínchez González (2004), defiende que teniendo presente las fases de aprendizaje en cada nivel del modelo de Van Hiele es posible plantearse muchas actividades que permitan caminar de la mano de este modelo en el contexto del aprendizaje de la Geometría.

Complejas actividades mentales, que algunas veces ponen una gran tensión en los procesos intelectuales, representan una oportunidad excelente para instruir la capacidad de manejo de los conceptos figurales en el razonamiento geométrico. La instrucción debe dirigirse a mejorar habilidades tales como: (a) cooperación constructiva de los aspectos figural y conceptual en una actividad geométrica de resolución de problemas; (b) la habilidad de mantener en mente y coordinar tanto como sea posible elementos figural-conceptuales: (c) la habilidad de organizar el proceso mental en subunidades significativas para reducir la carga de memoria; y (d) la habilidad de predecir e integrar el efecto de cada transformación en el camino de la solución (Fischbein, 1993).