RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

PASANTIA CHILE 2012

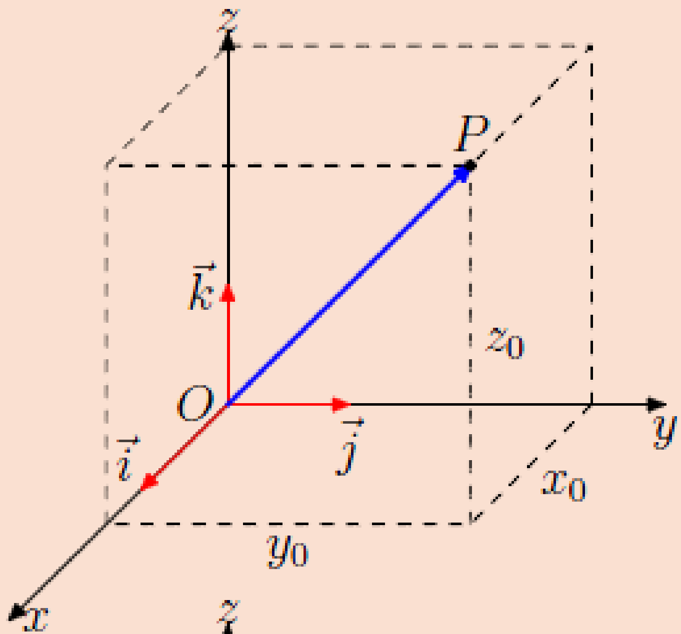
UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Tabla de Contenido

1. Sistema de referencia

Un sistema de referencia en el espacio consta de un punto O llamado origen y tres vectores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene un vector de posición $\overrightarrow{OP}$.

$$\overrightarrow{OP} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$



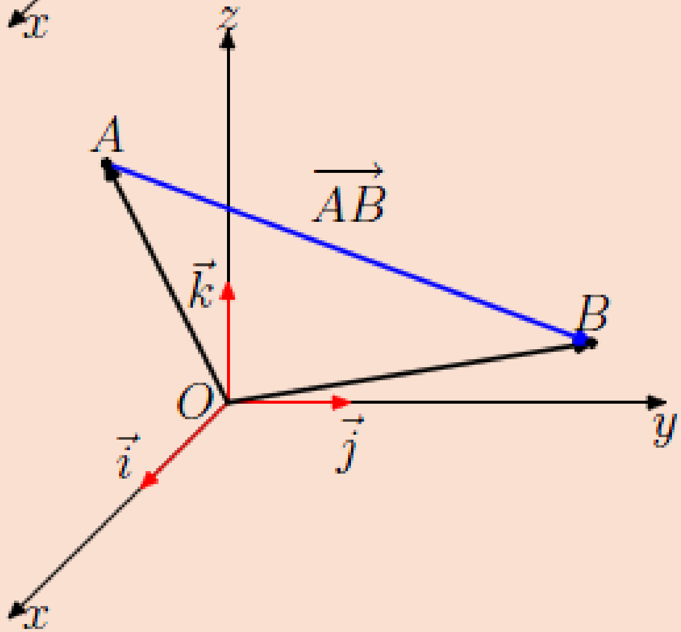
- **Vector de dos puntos**

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

luego

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

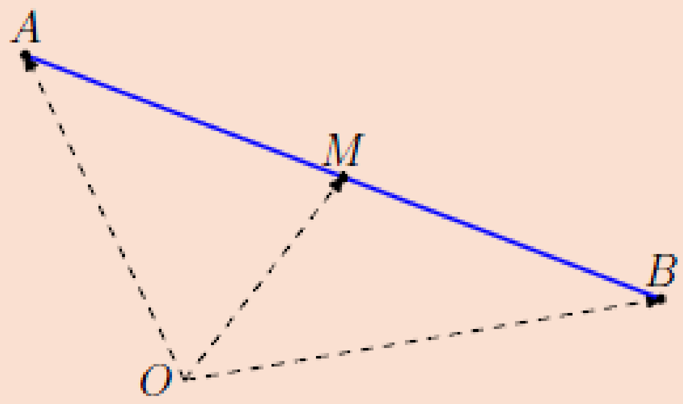


$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)}$$

• Punto medio de dos puntos

Dados los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ se tiene que el punto medio del segmento AB verifica

$$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM}$$



luego

$$(B-A) = 2\,(M-A) \Longrightarrow M = \frac{A+B}{2}$$

$$\boxed{M = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)}$$

Ejemplo 1.1. Hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ y el punto medio de los puntos $A(-1, 3, 4)$ y $B(3, 1, 2)$.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1, 2) - (-1, 3, 4) = (4, -2, 2)$$

$$M = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 2, 3)$$

□

2. Ecuaciones de la recta

Definición 2.1 *La ecuación de una recta viene determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{u}$.*

$$r \equiv < A; \vec{u} >$$

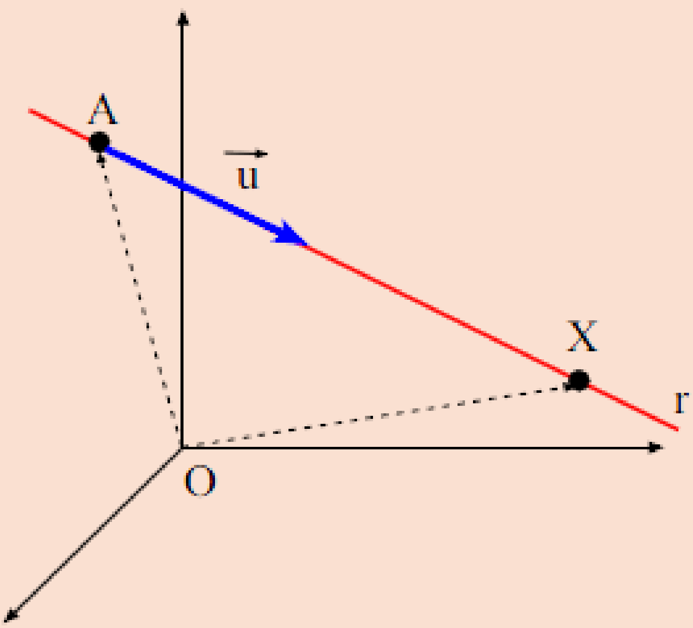
En el dibujo se observa que un punto X pertenece a la recta r, si el vector $\overrightarrow{AX}$ es proporcional al vector $\vec{u}$, es decir $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u}$ para algún $\lambda \in R$.

Siendo

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$
$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{u}$$
$$(X - O) - (A - O) = \lambda \vec{u}$$

despejando X se obtiene la ecuación

$$\boxed{\mathbf{r} \equiv X = A + \lambda \vec{u}} \qquad (1)$$



en coordenadas se obtiene

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (u_1, u_2, u_3)$$

Dependiendo de como escribamos la expresión anterior obtenemos diferentes ecuaciones de la recta.

2.1. Tipos de Ecuaciones de la recta

- **Ecuación Vectorial.** Expresando la ecuación 1 en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas.** Separando las componentes

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\,u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\,u_2 \\ z & = & z_0 + \lambda\,u_3 \end{array}\right\}$$

- **Ecuaciones Continua.** Despejando en la expresión anterior el parámetro λ e igualando

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

- **Ecuaciones Cartesianas.** Operando las igualdades, es decir, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left.\begin{array}{rcl} Ax + By + Cz + D & = & 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2.1. Determinar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(0, 3, 2)$.

Solución: El vector director $\vec{u} = \vec{AB} = (-1, 1, 1)$

- **Ecuación Vectorial.** $(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda\,(-1, 1, 1)$

- **Ecuaciones Paramétricas.** $\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1-\lambda \\ y & = & 2+\lambda \\ z & = & 1+\lambda \end{array}\right\}$
- **Ecuación Continua.** $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$
- **Ecuaciones Cartesianas.** Operando las igualdades, agrupando términos y ordenando se obtiene las expresiones:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x-1}{-1} & = & \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{y-2}{1} & = & \dfrac{z-1}{1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-3 & = & 0 \\ y-z-1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$\square$

Ejemplo 2.2. Determinar de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$, su dirección y dos puntos de la misma.

Solución: La dirección viene dada por $\vec{u} = (2,3,1)$. Un punto es $A(1,-1,2)$. Para hallar otro punto usamos la expresión vectorial

$$r \equiv X = A + \lambda\,\vec{u}$$

Haciendo $\lambda = 2$ obtenemos

$$X_1 = (1,-1,2) + 2\,(2,3,1) = (5,5,4)$$

Haciendo $\lambda = 3$ obtenemos

$$X_2 = (1, -1, 2) + 3\,(2, 3, 1) = (7, 8, 5)$$

y así sucesivamente para obtener más puntos. $\square$

Ejemplo 2.3. Dada la recta: $\left.\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 3\lambda \\ y & = & 2 + \lambda \\ z & = & 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$

Determinar su vector direccional y dos puntos de la misma.

Solución:

Su vector direccional es $\vec{u} = (-3, 1, 2)$. Un punto es $A(1, 2, 1)$. Para hallar otro punto damos valores al parámetro λ, por ejemplo, haciendo $\lambda = 1$ obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcccr} x & = & 1 - 3(1) & = & -2 \\ y & = & 2 + (1) & = & 3 \\ z & = & 1 + 2(1) & = & 3 \end{array}\right\}$$

$\square$

Ejercicio 1. Comprobar si los puntos $A(2, 3, 1), B(5, 4, 3)$ y $C(2, 1, 2)$ están alineados.

Ejercicio 2. Dados los puntos $A(m, 2, -3)$, $B(2, m, 1)$ y $C(5, 3, -2)$, determinar el valor de m para que estén alineados, y hallar la recta que los contiene.

Ejercicio 3. Dada la recta $r\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 3 & = & 0 \\ y - z - 1 & = & 0 \end{array}\right.$, escribirla en forma continua.

3. Ecuación del plano

Definición 3.1 *La ecuación de un plano viene determinada por un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ linealmente independientes.*

$$\pi \equiv < A; \vec{u}, \vec{v} >$$

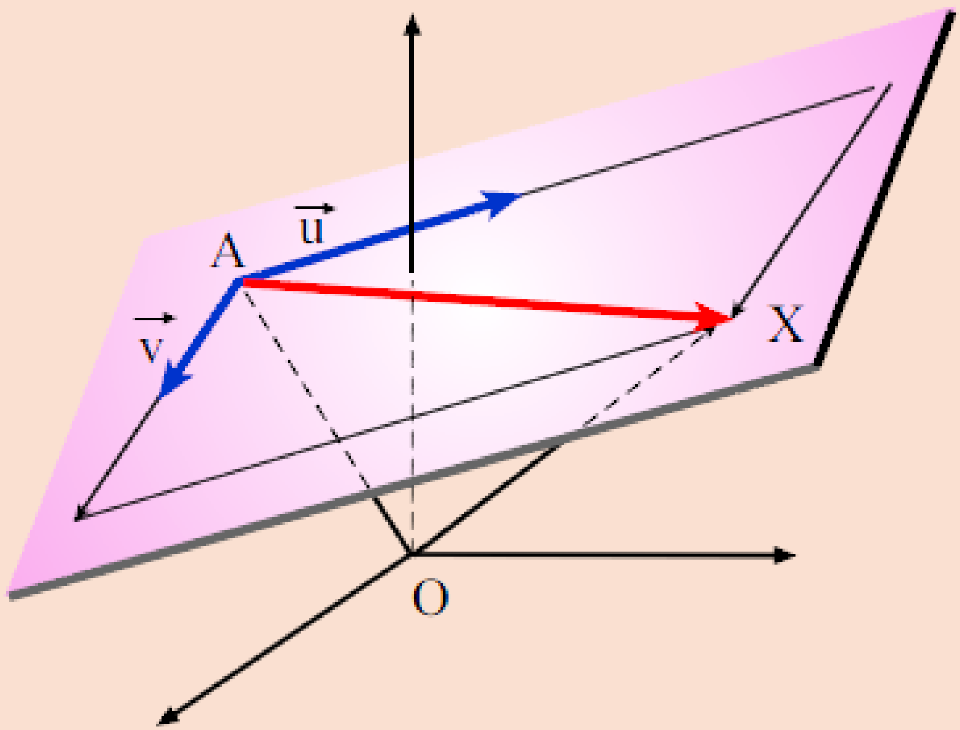
Un punto X pertenece al plano π, observar el dibujo, si el vector $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

para algún $\lambda, \mu \in R$

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

Identificando $\overrightarrow{OX} = X$ y $\overrightarrow{OA} = A$ se obtiene la ecuación



$$\boxed{\pi \equiv X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}} \tag{2}$$

3.1. Tipos de Ecuaciones del plano

- **Ecuación Vectorial.** Expresando la ecuación 2 en coordenadas

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\,(u_1, u_2, u_3) + \mu\,(v_1, v_2, v_3)$$

- **Ecuaciones Paramétricas.** Separando las componentes

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 + \mu\, v_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 + \mu\, v_2 \\ z & = & z_0 + \lambda\, u_3 + \mu\, v_3 \end{array}\right\}$$

- **Ecuación Cartesiana.** Para hallar la ecuación cartesiana del plano hay que eliminar los parámetros λ y μ en las ecuaciones paramétricas. Como el vector $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de los vectores direccionales $\overrightarrow{u}$ y $\vec{v}$, el rango de la matriz $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ es 2

$$rg\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$$

y por tanto su determinante es nulo.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv ax + by + cz + d = 0} \qquad (3)$$

Ejemplo 3.1. Determinar las ecuaciones del plano que pasa por los puntos $A(2,3,5)$, $B(1,1,2)$ y $C(3,6,10)$.

Solución: La dirección viene dada por los vectores

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,-3) \qquad \overrightarrow{AC}(1,3,5)$$

Ecuación Vectorial

$$\pi \equiv (x,y,z) = (2,3,5) + \lambda\,(-1,-2,-3) + \mu\,(1,3,5)$$

Ecuaciones Paramétricas

$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & 2-\lambda+\mu \\ y & = & 3-2\,\lambda+3\,\mu \\ z & = & 5-3\,\lambda+5\,\mu \end{array}\right\}$$

Ecuación Cartesiana

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Se desarrolla por adjuntos por la primera fila

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

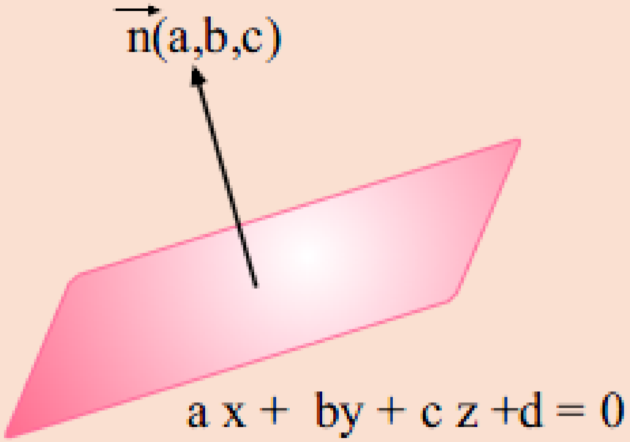
□

En la ecuación general del plano:

$$\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

los coeficientes (a, b, c) corresponden a las componentes del vector **perpendicular** al plano y se le denomina el vector **normal** del plano π.

$$\vec{\mathbf{n}}\,(a, b, c)$$



Ejemplo 3.2. Determinar las ecuaciones paramétricas del plano

$$\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$$

Solución: Elegimos dos variables libres como parámetros, por ejemplo $y = \lambda$ y $z = \mu$, quedando

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\,\lambda - \mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & \mu \end{array}\right.$$

La dirección viene dada por los vectores

$$\vec{u}(2, 1, 0) \qquad \vec{v}(-1, 0, 1)$$

$\square$

Ejercicio 4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2, 0, 1)$ y contiene a la recta de ecuación :

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1, 0, 0)$ y es perpendicular al plano $x - y - z + 2 = 0$.

Ejercicio 6. Determinar la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular al plano π, siendo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \qquad \pi : \left\{ \begin{array}{ll} x & = \lambda - \mu \\ y & = \lambda \\ z & = \mu \end{array} \right.$$

Test. El punto $A(0, 1, 2)$ y los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$ y $\vec{v}(2, 4, 6)$ determinan un plano

(a) Si (b) No

Test. El punto $A(7, -4, 2)$ y la recta $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ determinan un plano

(a) Si (b) No

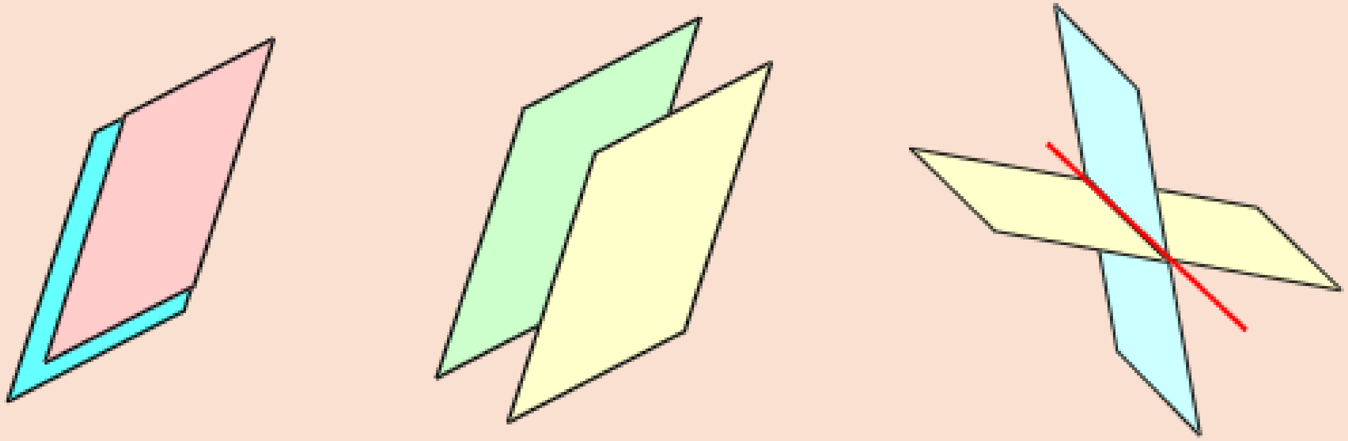
4. Posición relativa de dos planos

Teorema 4.1. Sean dos planos
$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z = D_2 \end{array}$$

Estudiamos el sistema lineal de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}}^{A} & & & \begin{matrix} D_1 \\ D_2 \end{matrix} \end{array}\right)}_{AM} \qquad \begin{array}{lllc} r(A)=1 & r(AM)=1 & \Rightarrow & \pi_1 \equiv \pi_2 \\ r(A)=1 & r(AM)=2 & \Rightarrow & \pi_1 \parallel \pi_2 \\ r(A)=2 & r(AM)=2 & \Rightarrow & \pi_1 \cap \pi_2 = \{r\} \end{array}$$

r(A)=r(AM)=1 | r(A)=1 r(AM)=2 | r(A)=2 r(AM)=2



$\pi_1 = \pi_2$ | $\pi_1 \parallel \pi_2$ | $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$

Ejemplo 4.1. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{array}{rcl}\pi_1 & \equiv & 3\,x - 2\,y + 4\,z = 2 \\ \pi_2 & \equiv & 2\,x + 3\,y - 5\,z = -8\end{array}$$

Solución:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{3 \quad -2 \quad 4}^{A} & & & 2 \\ 2 \quad 3 \quad -5 & & & -8 \end{array}\right)}_{AM} \overset{3\,f_2 - 2\,f_1}{\equiv} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{3 \quad -2 \quad 4}^{A} & & & 2 \\ 0 \quad 13 \quad -23 & & & -28 \end{array}\right)}_{AM}$$

Como $r(A) = r(AM) = 2$ los planos determinan una recta, $\pi_1 \cap \pi_2 = \{r\}$. Para hallar r resolvemos el sistema pasando z como variable libre. De la segunda ecuación $y = -\dfrac{28}{13} + \dfrac{23}{13}z$ y sustituyendo en la primera ecuación $x = -\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}z$, luego la recta es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{10}{13} - \dfrac{2}{13}\,\lambda \\ y & = & -\dfrac{28}{13} + \dfrac{23}{13}\,\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

$\square$

Ejemplo 4.2. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv \quad 3\,x - 2\,y + 4\,z = 1\\ \pi_2 &\equiv -6\,x + 4\,y - 8\,z = -2\end{aligned}$$

Solución: Como

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2}$$

los planos son coincidentes. $\square$

Ejemplo 4.3. Determinar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv \quad 3\,x - 2\,y + 4\,z = 1\\ \pi_2 &\equiv -6\,x + 4\,y - 8\,z = 0\end{aligned}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1\\ -6 & 4 & -8 & 0\end{array}\right) \overset{f_2+2\,f_1}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

Como $r(A) = 1 < r(AM) = 2$ los planos son paralelos. $\square$

4.1. Haz de planos

Definición 4.1 *Sea la recta r determinada por los planos π_1 y π_2.*

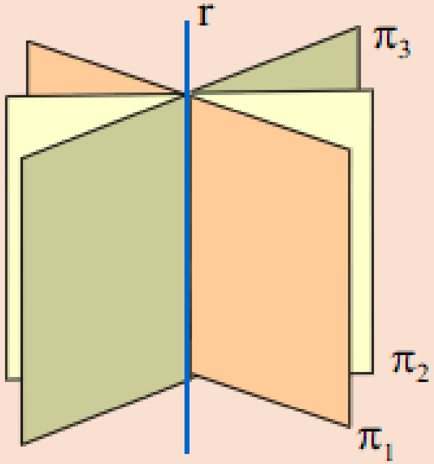
$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 & \equiv \quad A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0 \\ \pi_2 & \equiv \quad A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \end{cases}$$

llamamos haz de planos a los infinitos planos que pasan por r. Su expresión viene dada por:

$$\boxed{\alpha\,(A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1) + \beta\,(A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2) = 0}$$

La figura muestra el haz de planos. Se asemeja a un libro con infinitas hojas (los planos). Dando valores a los parámetros α y β no nulos a la vez, se obtienen los infinitos planos del haz.

$$\alpha\,\pi_1 + \beta\,\pi_2 = 0$$



Ejemplo 4.4. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y contiene a la recta determinada por los planos:

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 2$$
$$\pi_2 \equiv 2\,x + y - z = -1$$

Solución: El plano buscado está en el haz

$$\alpha\,(x - y + z - 2) + \beta\,(2\,x + y - z + 1) = 0$$

exigimos que pase por el punto $P(2, -1, 3)$

$$\alpha\,(2 + 1 + 3 - 2) + \beta\,(2\,(2) - 1 - 3 + 1) = 0$$

es decir

$$4\,\alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \beta = -4\alpha$$

Haciendo $\alpha = 1 \Longrightarrow \beta = -4$, y sustituyendo se obtiene

$$7\,x + 5\,y - 5\,z + 6 = 0$$

$\square$

Ejercicio 7. Dada la recta r formada por π_1 y π_2:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x - y = 2 \\ \pi_2 &\equiv y - z = 1 \end{aligned}$$

Hallar:

a) La expresión de todos los planos que la contienen.

b) El plano que contiene a r y pasa por el origen.

c) El plano que contiene a r y es paralelo $x - z = 5$.

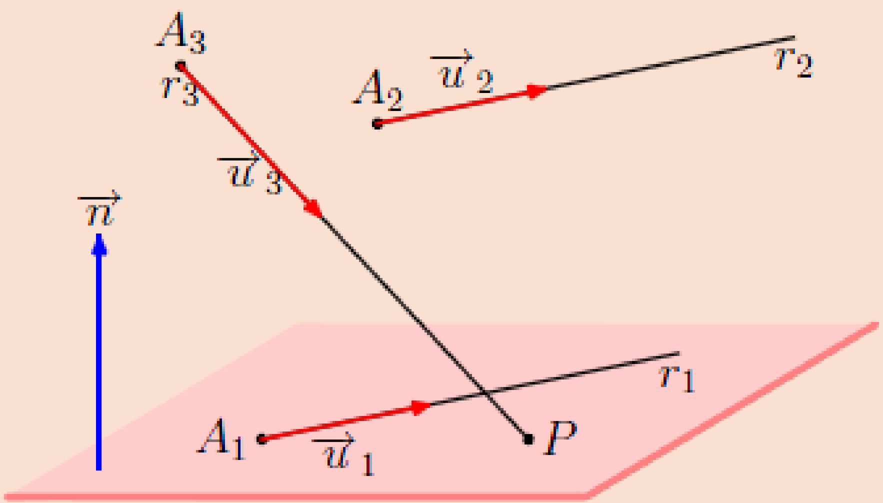
5. Posición relativa de recta y plano

Teorema 5.1. Sean la recta r y el plano π:

$$r \equiv \frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}$$

$$\pi \equiv a\,x + b\,y + c\,z = d$$

Para estudiar la posición relativa de la recta y el plano, se compara el vector de la recta $\vec{u}(u, v, w)$ con el vector normal $\vec{n}(a, b, c)$ del plano. Se pueden presentan tres casos:



1. $\vec{u}_1 \perp \vec{n}$ y $A_1 \in \pi \Rightarrow$	$r_1 \subset \pi$.	Contenida.
2. $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ y $A_2 \notin \pi \Rightarrow$	$r_2 \parallel \pi$.	Paralela.
3. $\vec{u}_3 \not\perp \vec{n}$ $\Rightarrow$	$r_3 \cap \pi = \{P\}$.	Se cortan.

Ejemplo 5.1. Determinar b para que la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{b} = \frac{z}{6}$$

no corte al plano $\pi : 2x - 4y + 5z = 0$

Solución:
Para que r no corte al plano tiene que ser paralela, luego

$$\vec{u}(3, b, 6) \perp \vec{n}(2, -4, 5)$$

$$\vec{u}(3, b, 6) \cdot \vec{n}(2, -4, 5) = 0 = 36 - 4\,b = 0 \Longrightarrow \boxed{b = 9}$$

Si $b = 9$, $r \parallel \pi$, veamos que no esta contenida comprobando que no tienen un punto común. Tomamos $A(1, 2, 0) \in r$ y sustituimos en π.

$$2(1) - 4(2) + 5(0) = -6 \neq 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$$

□

Ejercicio 8. Dados el plano $\pi : x + y + mz = n$, y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

a) Calcular m y n para que π contenga a r.

b) Calcular m y n para que π y r sean paralelos.

c) Calcular m y n para que π y r sean secantes.

6. Posición relativa de tres planos

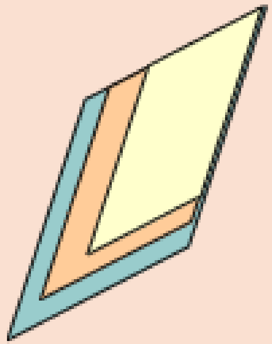
Sean los planos π_1,π_2, y π_3:

$$\begin{array}{lcl} \pi_1 & \equiv & A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z = D_1 \\ \pi_2 & \equiv & A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z = D_2 \\ \pi_3 & \equiv & A_3\,x + B_3\,y + C_3\,z = D_3 \end{array} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} \overbrace{A_1 \quad B_1 \quad C_1}^{A} & & D_1 \\ A_2 \quad B_2 \quad C_2 & & D_2 \\ A_3 \quad B_3 \quad C_3 & & D_3 \end{array} \right)}_{AM}$$

Se analiza el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas discutiendo los rangos de las matrices A y la ampliada AM. Se pueden presentar los siguientes casos:

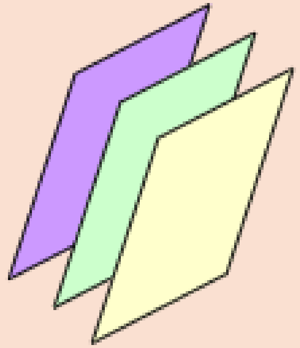
- $r(A) = 1$ $r(AM) = 1$, planos coincidentes.
- $r(A) = 1$ $r(AM) = 2$, planos paralelos.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 2$, Haz de planos, pudiendo haber dos de ellos coincidentes. Tienen una recta en común.
- $r(A) = 2$ $r(AM) = 3$, los 3 planos no tienen puntos comunes, pueden ser 2 paralelos que intersecan respectivamente al otro, o bien, se intersecan dos a dos en respectivas rectas.
- $r(A) = 3$ $r(AM) = 3$, los planos tienen un punto en común.

r(A)=1
r(AM)=1



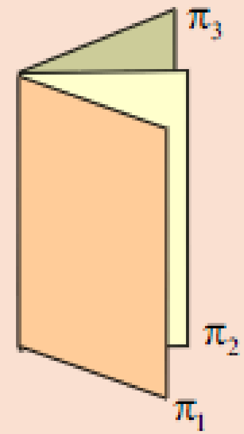
$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

r(A)=1
r(AM)=2

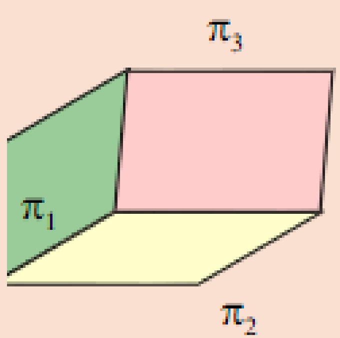


$\pi_1 \parallel \pi_2$

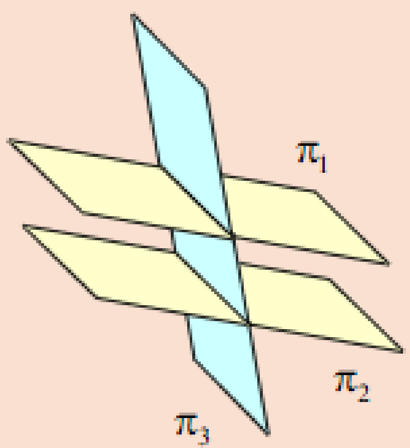
r(A)=2
r(AM)=2



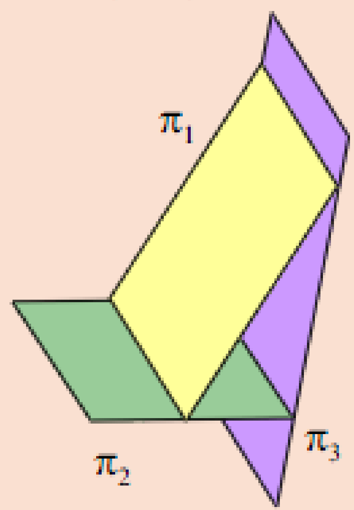
r(A)=3
r(AM)=3



r(A)=2
r(AM)=3



r(A)=2
r(AM)=3



Ejemplo 6.1. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\left\{\begin{array}{lll}\alpha: & x+y+kz & =1\\ \beta: & kx+y+z & =1\\ \gamma: & 2x+y+z & =k\end{array}\right.$$

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \vee \quad k = 2$

$$k=1 \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\end{array}\right)}_{AM} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\end{array}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{c} r(A)=2\\ r(AM)=2\\ \text{Haz de planos}\end{array}$$

$$k=2 \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}1\\1\\2\end{matrix}\end{array}\right)}_{AM} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}\end{array}\right)}_{AM} \Rightarrow \begin{array}{c} r(A)=2\\ r(AM)=3\\ \alpha\cap\beta=r_1\\ \alpha\cap\gamma=r_2\\ \beta\parallel\gamma\end{array}$$

Si $k \neq 1; 2$, $r(A) = r(AM) = 3$, S.C.D. y los tres planos se cortan en un punto. □

Ejemplo 6.2. Discutir la posición relativa de los planos:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & z = & 1 \\ 6x & + & y & - & 2z = & 7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-6f_1]{f_2-3f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-f_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.$r(A) = r(AM) = 2$, S.C.I, los tres planos tienen una recta en común. □

Ejercicio 9. Dados los planos :

$$\left\{\begin{array}{lrl} \pi_\alpha : & 2x - ky - 4z & = 2 \\ \pi_\beta : & kx - y + z & = -3 \\ \pi_\gamma : & x + y + z & = 1 \end{array}\right.$$

1. ¿Para qué k, determinan π_α y π_β una recta, $r(k)$?.
2. Estudiar la posición relativa de las rectas $r(k)$, respecto del plano γ.

7. Posición relativa de dos rectas

Sean dos rectas cualesquiera

$$\mathbf{r} : A + \lambda \vec{u} \qquad \mathbf{s} : B + \mu \vec{v}$$

Las posibles posiciones relativas entre ellas son:

- **Rectas paralelas**

  Dos rectas r y s son paralelas si tienen la misma dirección.

Ejemplo 7.1. Comprobar que las rectas r y s son paralelas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución: En efecto, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ son proporcionales, luego r y s tienen la misma dirección. □

- **Rectas coincidentes**

  Dos rectas r y s son coincidentes, si son paralelas y tienen un punto en común.

Ejemplo 7.2. Comprobar que las rectas r y s no son coincidentes:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(2,4,6)$ son proporcionales, luego r y s son paralelas. Por otra parte como el punto $A(0,1,-3)$ de r no satisface la ecuación de s, pues

$$\frac{0}{2} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{6}$$

las rectas son paralelas pero no coincidentes. □

- **Rectas que se cortan o se cruzan**

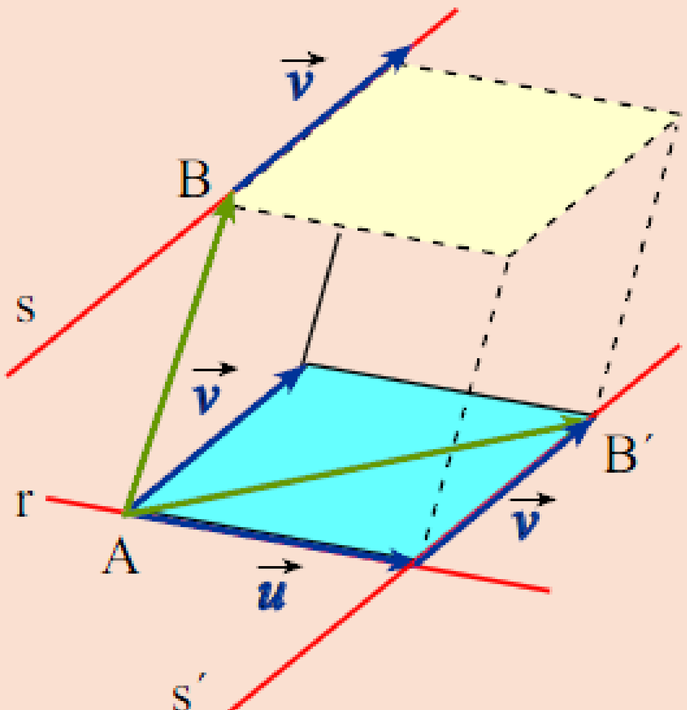
Si r y s no son paralelas hay dos posiciones de interés: que se corten o se cruzen en el espacio.(Observar el gráfico inferior)

Si las rectas se cortan forman un plano y los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son dependientes luego

$$det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = 0$$

y si se cruzan en el espacio los vectores $\vec{u}$,$\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son independientes luego

$$det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) \neq 0$$



Ejemplo 7.3. Comprobar que las rectas r y s se cruzan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(1,0,1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(0,-1,3)$ y calculamos $det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{ se cruzan}$$

□

Ejemplo 7.4. Comprobar que las rectas r y s se cortan en el espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3} \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

Solución: En efecto, por una parte, los vectores $\vec{u}(1,1,3)$ y $\vec{v}(1,0,1)$ no son proporcionales, luego r y s no son paralelas. Formamos el vector $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ y calculamos $det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ se cortan}$$

también decimos que las rectas son incidentes, secantes o coplanarias. □

Otra forma equivalente de estudiar la posición relativa de dos rectas es estudiar el rango de las matrices determinadas por los vectores $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Posición relativa de dos rectas

1. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r y s son coincidentes.**
2. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 1 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r y s son paralelas.**
3. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r y s se cortan.**
4. $\left.\begin{array}{c} r\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2 \\ r\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ **r y s se cruzan.**

Ejercicio 10. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 7z - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 11. Determinar a y b para que las rectas sean paralelas

$$r \equiv 4x = 2y + 6 = z \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + ay - z = 1 \\ 2x + 3y + bz = 3 \end{array} \right.$$

Ejercicio 12. Hallar los valores de m y n para que las rectas r y s sean paralelas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & 5 + 5\lambda \\ y = & 3 + \lambda \\ z = & -\lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

Ejercicio 13. Estudiar según los valores del parámetro a, la posición relativa de las rectas r y s:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x = & (a+2)\lambda \\ y = & 1 \\ z = & a \end{array} \right.$$

$$s \equiv \frac{a-x}{1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$$

Ejercicio 14. Estudiar la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} kx + y + z = k^2 \\ x + y + kz = k \end{array} \right.$$

y el plano $\alpha : x + y + 2kz = 2$, según los valores del parámetro real k.