GEOMETRIA DEL PLANO VECTORES

PASANTIA CHILE 2012

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Tabla de Contenido

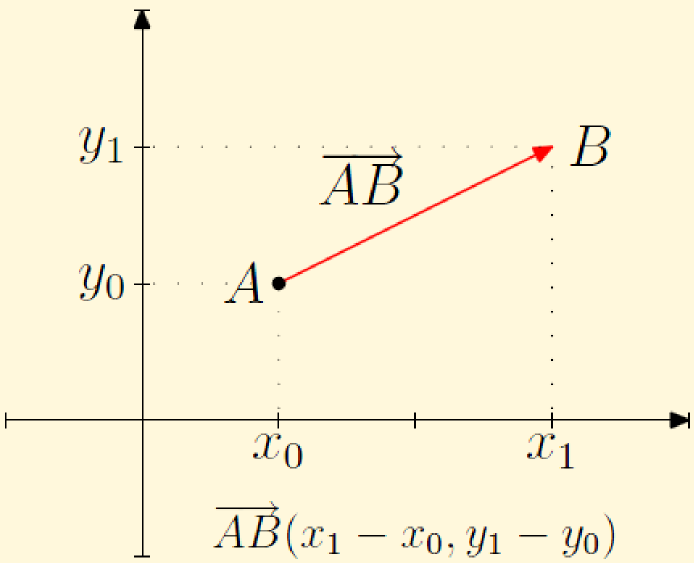
1. Vectores en el plano

1.1. Vector fijo y libre

Definición 1

Llamamos vector fijo $\overrightarrow{AB}$ *al segmento orientado que tiene su origen en el punto* A *y su extremo en el punto* B.

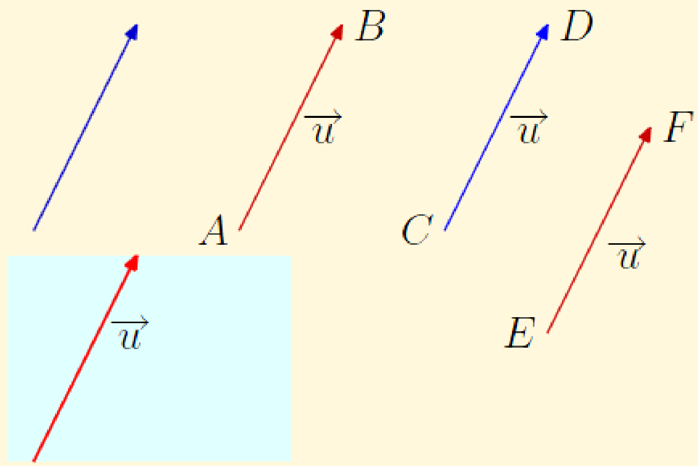
- ***Módulo:*** *Es la longitud del vector. Lo representamos por* $|\overrightarrow{AB}|$
- ***Dirección:*** *Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos tienen la misma dirección.*
- ***Sentido:*** *Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.*



Definición 2

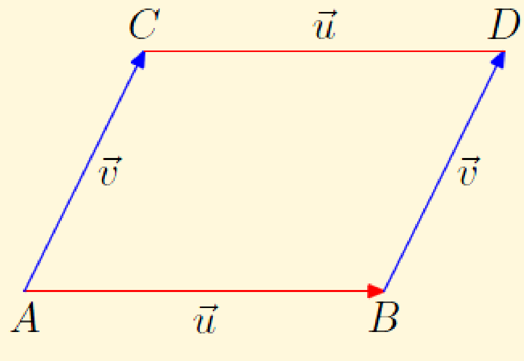
Vectores equipolentes son los vectores que tinen : mismo módulo, dirección y sentido

Todos los vectores del gráfico tienen la misma dirección, sentido y magnitud, son todos ellos equipolentes. También decimos que son representantes del vector libre $\vec{u}$.



Así, los vectores $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son equipolentes y representantes del mismo vector libre $\vec{u}$.

En el paralelogramo $ABDC$, son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, y representantes de $\vec{u}$.



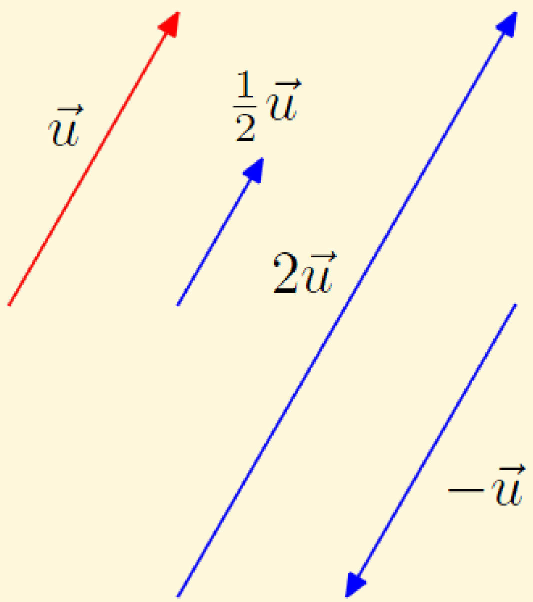
También son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$, y representantes de $\vec{v}$.

1.2. Operaciones con vectores

Definición 3

El producto de un número α por un vector $\vec{\mathbf{u}}$ es otro vector libre representado por $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$

El vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ mantiene la dirección pero puede cambiar el sentido o la magnitud del vector $\vec{\mathbf{u}}$.



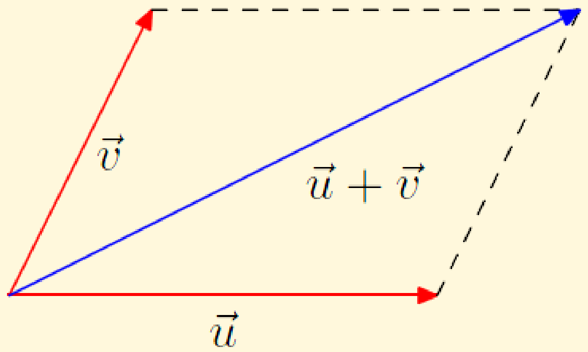
- Si $\alpha > 0$, $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, y si $\alpha < 0$ tienen sentido contrario.
- Si $\alpha > 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ se dilata o alarga y si $\alpha < 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ se contrae o acorta.
- El caso que $\alpha = 0$, el vector $\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$ corresponde al vector nulo $(0, 0)$

En el gráfico se muestran los vectores múltiplos de $\vec{\mathbf{u}}$, la mitad de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = \dfrac{1}{2}$, el doble de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = 2$ y el opuesto de $\vec{\mathbf{u}}$ con $\alpha = -1$.

Definición 4 *La suma de los vectores libres* $\vec{\mathbf{u}}$ *y* $\vec{\mathbf{v}}$ *es otro vector libre*

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$$

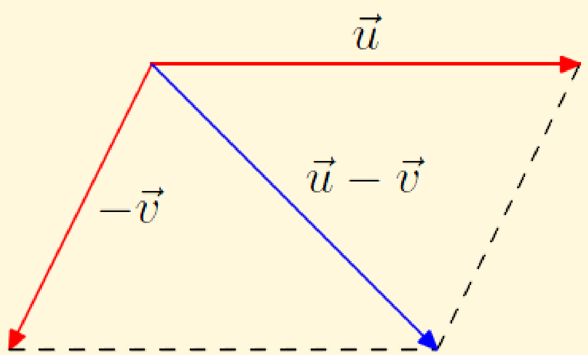
que se obtiene gráficamente, tomando representantes de $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ con el mismo origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que determinan. También se llama la resultante.



Definición 5 *La resta de los vectores libres* $\vec{u}(u_1, u_2)$ *y* $\vec{v}(v_1, v_2)$ *es otro vector libre definido por*

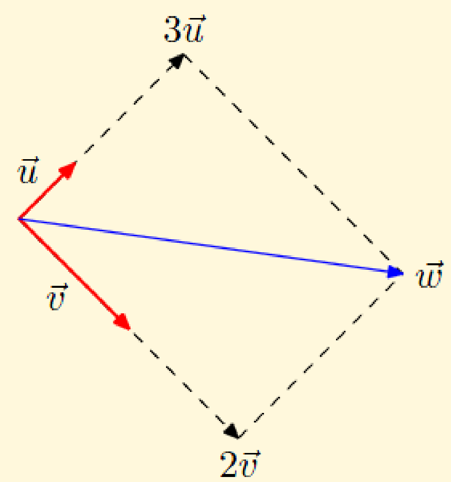
$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

la interpretación gráfica de la resta se muestra en el dibujo. El vector resta $\vec{u}-\vec{v}$ es la diagonal del paralelogramo construido con $\vec{u}$ y $-\vec{v}$.



Ejemplo 1.1. Dados dos vectores no dependientes $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ hallar $3 \cdot \vec{\mathbf{u}} + 2\,\vec{\mathbf{v}}$

Solución:



□

Ejemplo 1.2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

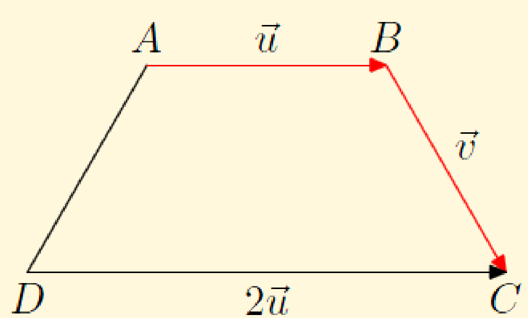
a) $\overrightarrow{BA}$ *b*) $\overrightarrow{AC}$ *c*) $\overrightarrow{DB}$

Solución:

a) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$



□

Ejemplo 1.3.

Considera el hexágono regular de la figura. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{BC}$ *b*) $\overrightarrow{AO}$ *c*) $\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{DO}$ *e*) $\overrightarrow{CD}$ *f*) $\overrightarrow{AE}$

Solución:

a) $\overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$

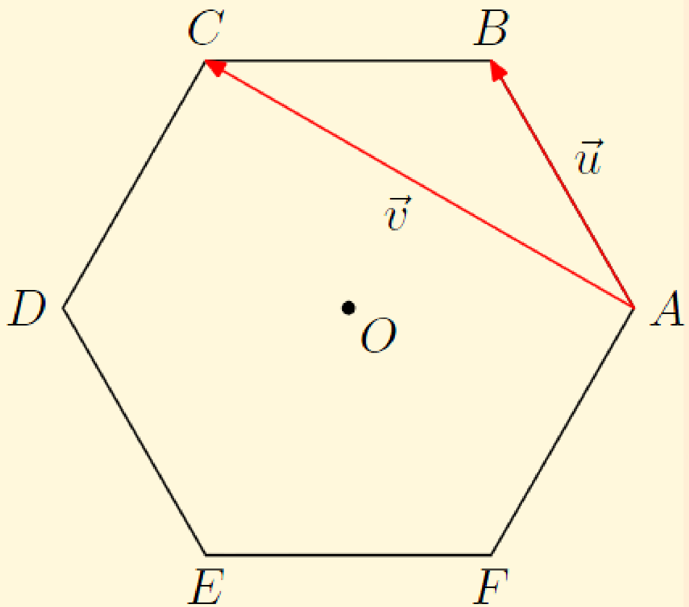
d) $\overrightarrow{DO} = -\,\overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

e) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{v} + (-2\,\vec{u} + 2\,\vec{v})$

$\overrightarrow{CD} = -2\,\vec{u} + \vec{v}$

f) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = (-2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}) - \vec{u}$

$\overrightarrow{AE} = -3\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$



□

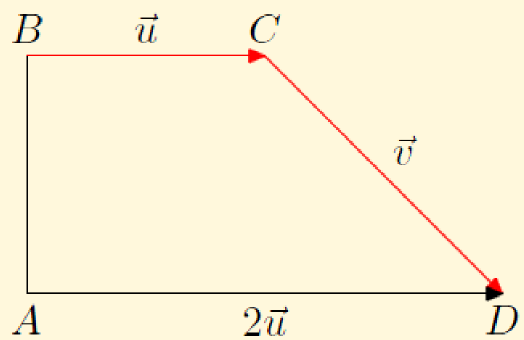
Ejercicio 1. Dados dos vectores no dependientes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ hallar $-2 \cdot \mathbf{u} - 2 \cdot \mathbf{v}$

Ejercicio 2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}$



Ejercicio 3. Siendo M, N, P los puntos medios de los lados, expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{MB}$

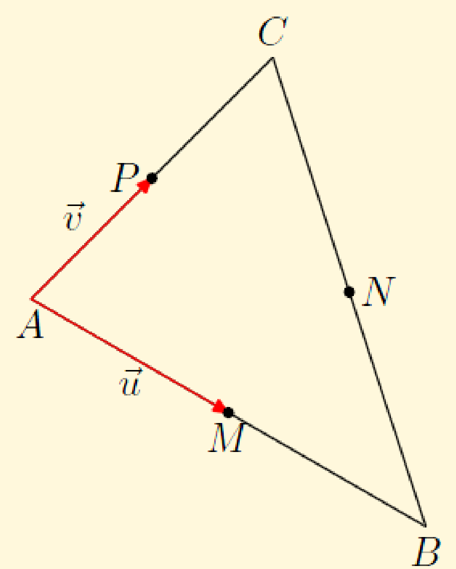
b) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AN}$

e) $\overrightarrow{PM}$

f) $\overrightarrow{MC}$



1.3. Combinación lineal de vectores. Base

En los ejercicios anteriores, básicamente hemos hecho dos cosas con los vectores. Multiplicarlos por un número y sumarlos (restarlos). Esas dos operaciones constituyen lo que se llama una combinación lineal, bien de uno o más vectores.

Definición 6

Decimos que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ es combinación lineal del vector $\vec{\mathbf{u}}$ si existe un escalar α con

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

también decimos que $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son dependientes o proporcionales. Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ no son dependientes decimos que son independientes.

Definición 7

Decimos que el vector $\vec{\mathbf{w}}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ si existen escalares α y β con

$$\vec{\mathbf{w}} = \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}} + \beta \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Definición 8 (Base)

Decimos que los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ forman una base en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{\mathbf{w}} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

2. Coordenada cartesianas

Tomando en el plano un punto cualquiera O como origen de referencia vamos a introducir coordenadas para trabajar con los vectores.

2.1. Base canónica

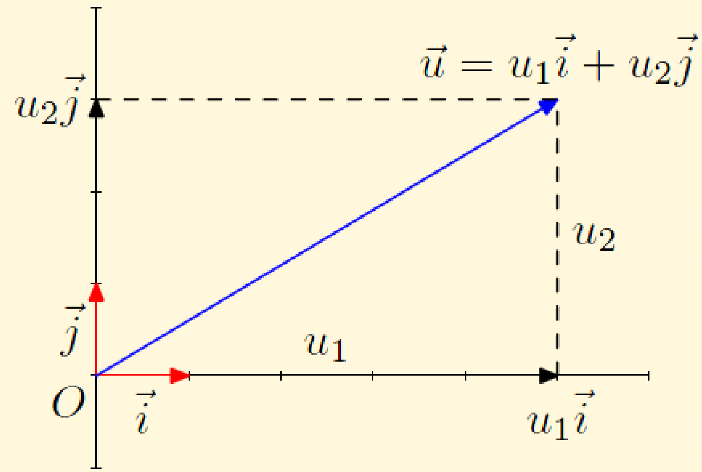
De entre todas las bases elegimos la base canónica determinada por los vectores $\vec{\mathbf{i}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{j}}(0,1)$. Así cualquier vector $\vec{\mathbf{u}}(u_1,u_2)$ se pude expresar como

$$(u_1,u_2) = u_1 \cdot (1,0) + u_2 \cdot (0,1)$$

$$\vec{\mathbf{u}} = u_1 \cdot \vec{\mathbf{i}} + u_2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$$

Los números u_1 y u_2 por este orden son las componentes del vector.
La magnitud o módulo del vector $\vec{\mathbf{u}}(u_1,u_2)$ por el teorema de Pitágoras corresponde a

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



Ejemplo 2.1. Expresar los vectores del gráfico en función de la base canónica $\vec{\mathbf{i}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{j}}(0,1)$ y determinar el módulo de de los mismos.

Solución:

- $\vec{\mathbf{v}} = 2 \cdot \vec{\mathbf{i}} + 4 \cdot \vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

- $\vec{\mathbf{w}} = -3 \cdot \vec{\mathbf{i}} + 2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$

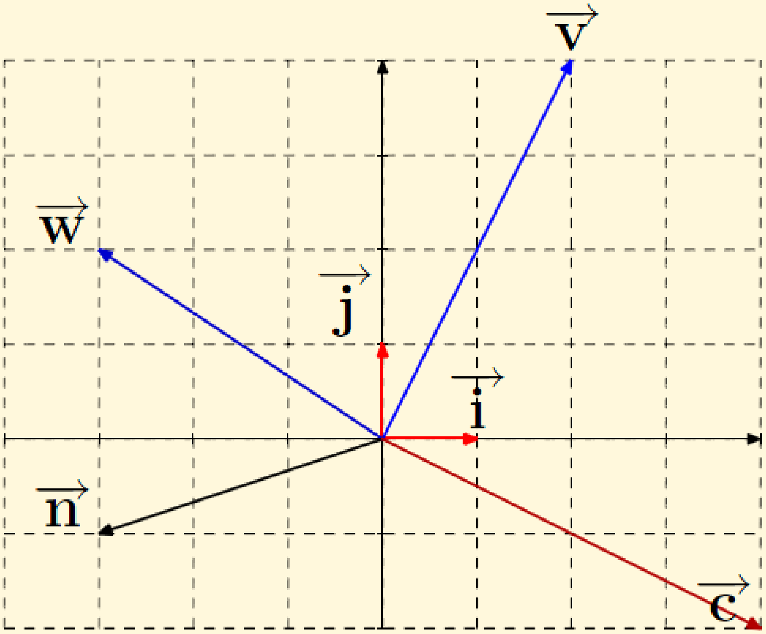
  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

- $\vec{\mathbf{n}} = -3 \cdot \vec{\mathbf{i}} - \cdot\vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

- $\vec{\mathbf{c}} = 4 \cdot \vec{\mathbf{i}} - 2 \cdot \vec{\mathbf{j}}$

  $|\vec{\mathbf{c}}| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$



□

A continuación vamos a repasar los conceptos de **dependencia**, **independencia**, **bases** y **combinación lineal** de vectores utilizando coordenadas.

Ejemplo 2.2. Comprobar que el vector $\vec{\mathbf{w}}(4,8)$ es combinación lineal del vector $\vec{\mathbf{u}}(1,2)$

Solución: Comprobamos si existe un escalar α con

$$(4,8) = \alpha \cdot (1,2)$$

Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 & = & 1\,\alpha \\ 8 & = & 2\,\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

□

Ejemplo 2.3. Dado el vector $\vec{\mathbf{v}}(8,12)$ hallar:

a) $3 \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *b*) $-2 \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *c*) $\dfrac{1}{4} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ *d*) $-\dfrac{1}{3} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

Solución:

a) $3 \cdot \vec{\mathbf{v}} = 3 \cdot (8,12) = (24,36)$

b) $-2 \cdot \vec{\mathbf{v}} = -2 \cdot (8,12) = (-16,-24)$

c) $\dfrac{1}{4} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{4} \cdot (8,12) = (2,3)$

d) $-\dfrac{1}{3} \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\dfrac{1}{3} \cdot (8,12) = (-\dfrac{8}{3},-4)$

□

Test.

1. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,3)$ son..?

(a) Independientes (b) Dependientes

2. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,4)$ son..?

(a) Independientes (b) Dependientes

Ejemplo 2.4. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(-1,3)$ hallar:

$a)$ $3\cdot\mathbf{u}\vec{+}\mathbf{2}\,\tilde{\mathbf{v}}$ $b)$ $-2\cdot\vec{\mathbf{u}}+3\cdot\vec{\mathbf{v}}$ $c)$ $-\vec{\mathbf{u}}+2\cdot\vec{\mathbf{v}}$

Solución:

$a)$ $3\cdot\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=3\cdot(2,1)+(-1,3)=(5,6)$

$b)$ $-2\cdot\vec{\mathbf{u}}+3\cdot\vec{\mathbf{v}}=-2\cdot(2,1)+3\cdot(-1,3)=(-7,1)$

$c)$ $-\vec{\mathbf{u}}+2\cdot\vec{\mathbf{v}}=-(2,1)+2\cdot(-1,3)=(-4,5)$

□

Ejemplo 2.5. Comprobar que el vector $\vec{\mathbf{w}}(4,7)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0,5)$.

Solución: Comprobamos si $(4,7)=\alpha\cdot(4,7)+\beta\cdot(0,5)$
Igualando componentes se tiene

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 & = & 2\,\alpha+0\,\beta \\ 7 & = & 1\,\alpha+5\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\alpha=2 \quad \beta=1}$$

□

Definición 9 (Base)

Decimos que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(v_1, v_2)$ forman una base en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{\mathbf{w}} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(v_1, v_2)$.

Ejemplo 2.6. Comprobar que los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0, 5)$ forman una base.

Solución: Los dos vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(0, 5)$ forman una base, pues son independientes ya que no hay ningún escalar α tal que $\vec{\mathbf{u}}(2, 1) = \alpha \cdot \vec{\mathbf{v}}(0, 5)$.
Observa que las componentes no son proporcionales:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{5}{1}$$

□

Ejemplo 2.7. ¿Forman una base los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}(4, 2)$?

Solución: No forman una base, pues los vectores son dependientes, ya que:

$$\vec{\mathbf{v}}(4, 2) = 2 \cdot \vec{\mathbf{u}}(2, 1)$$

Otra forma es ver que las componentes son proporcionales:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{son dependientes}$$

□

Test. Responde a las cuestiones:

1. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}(3,3)$ forman una base en R^2.

(a) Verdadero (b) Falso

2. Los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,0)$ y $\vec{\mathbf{v}}(2,1)$ forman una base en R^2.

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 4. Expresar el vector $\vec{\mathbf{w}}(5,2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(3,-2)$. Efectuar una representación gráfica.

Ejercicio 5. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,-2)$ y $\vec{\mathbf{w}}(2,3)$, hallar $\vec{\mathbf{v}}$ con

$$\vec{\mathbf{w}} = 2 \cdot \vec{\mathbf{u}} + 3 \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Ejercicio 6. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(1,1)$ y $\vec{\mathbf{w}}(-1,1)$. Comprobar que forman una base.

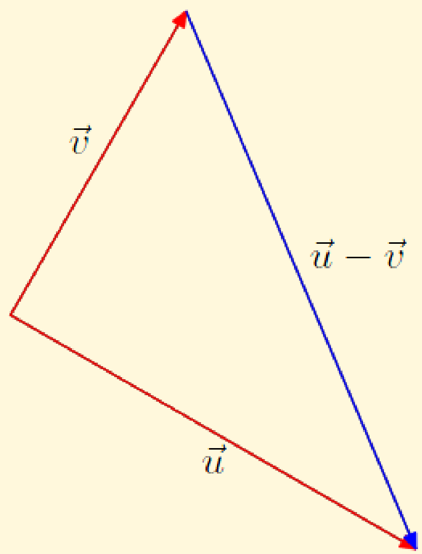
Ejercicio 7. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}(2,a)$ y $\vec{\mathbf{w}}(1,1)$. Hallar los valores de a para que formen una base.

3. Producto escalar de vectores

3.1. Vectores ortogonales

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en (figura). Diremos que son **perpendiculares** u **ortogonales** si se satisface el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$$



Aplicando la ecuación, la condición se transforma en

$$(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$$

Simplificando términos comunes queda

$$(u_1\, v_1 + u_2\, v_2) = 0$$

Así la igualdad es válida si el producto cruzado es cero. Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales $\vec{u} \perp \vec{v}$ si

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow u_1\, v_1 + u_2\, v_2 = 0} \tag{1}$$

3.2. Producto escalar

Al producto anterior de las componentes de dos vectores le definimos como producto escalar de dos vectores

$$\boxed{\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(v_1, v_2) = u_1\, v_1 + u_2\, v_2} \tag{2}$$

Cuando el producto escalar de dos vectores es cero, los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**.
Para hallar un vector perpendicular a $\vec{u}(u_1, u_2)$ basta cambiar el orden y el signo de una de las componentes.

$$\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(-u_2, u_1) = -u_1\, u_2 + u_2\, u_1 = 0$$

Así,

$$(1, 5) \perp (-5, 1) \qquad (2, 3) \perp (-3, 2) \qquad (8, 7) \perp (-7, 8)$$

3.3. Módulo de un vector

Observar que si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{u}$ por si mismo se obtiene el cuadrado de su módulo o longitud:

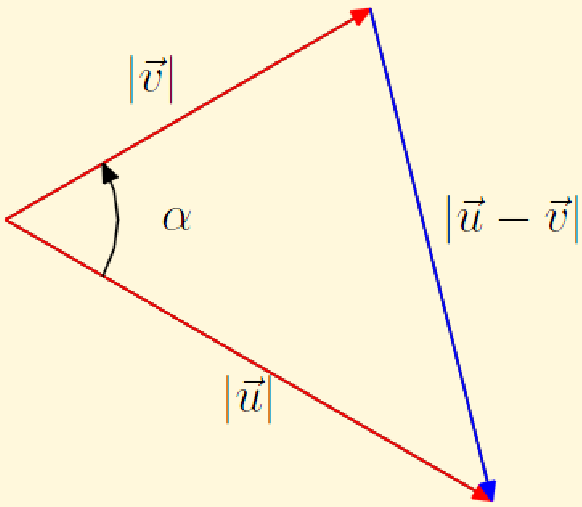
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 = |\vec{u}|^2 \tag{3}$$

o dicho de otra forma, el módulo de un vector es la raíz positiva de su producto escalar

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \tag{4}$$

3.4. Ángulo de dos vectores

Del teorema del coseno en un triángulo se tiene



$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha \qquad (5)$$

donde α es el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} |\vec{u}-\vec{v}|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,\cos\alpha} \qquad (6)$$

que nos da una segunda definición del producto escalar. Por ello se obtiene que el ángulo θ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}} \qquad (7)$$

Ejemplo 3.1. Determinar el ángulo de los vectores de R^2, $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(2,1) \cdot (0,1)}{|(2,1)| \cot |(0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{6}\,\sqrt{1}}$$

y de esto bastaría hallar

$$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{arcos} \frac{1}{\sqrt{6}}$$

□

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (6, -1)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m, 2)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

Ejercicio 9. Hallar todos los vectores $\vec{\mathbf{w}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{u}}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo.

Ejercicio 10. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}(-4, 6)$ y $\vec{\mathbf{v}}(5, m)$. Hallar m para que:

a) Sean dependientes

b) Sean perpendiculares

GEOMETRIA DEL ESPACIO VECTORES

PASANTIA CHILE 2012

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

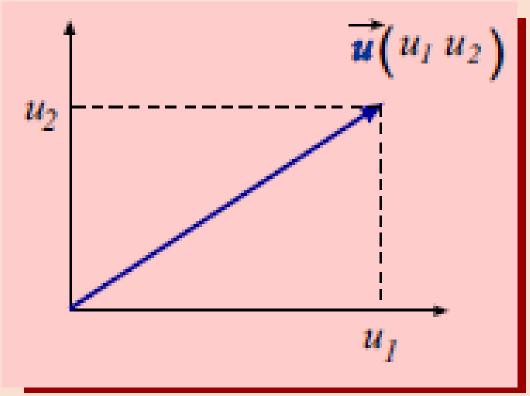
Tabla de Contenido

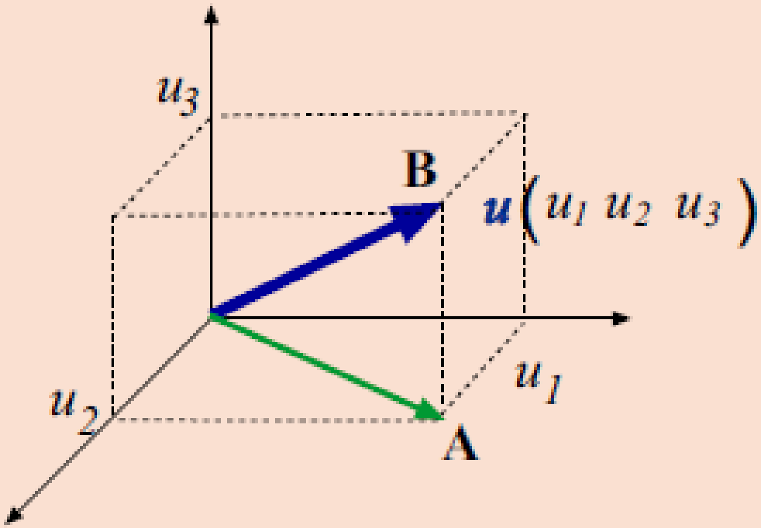
1. Producto escalar de vectores

1.1. Teorema de Pitágoras

La longitud de un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ en el plano, que representaremos por $||\vec{u}||$, en dos dimensiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo y se halla por el teorema de Pitágoras,

$$||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2$$





En el espacio tridimensional el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es la diagonal OB de una caja y su longitud se halla aplicando dos veces el teorema de Pitágoras. Primero se calcula la longitud de $\overrightarrow{OA}$,

$$||\overrightarrow{OA}||^2 = u_1^2 + u_2^2$$

OA forma un ángulo recto con el lado vertical $\overrightarrow{AB}(0, 0, u_3)$, de modo que recurrimos otra vez a Pitágoras. La hipotenusa del triángulo OAB es la longitud $||\vec{u}||$ que buscamos y está dada por

$$||\vec{u}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{1}$$

Para un vector de n dimensiones $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, la longitud o norma de un vector de R^n es la raíz cuadrada positiva de

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}} \tag{2}$$

Ejemplo 1.1. Hallar la norma de los vectores

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \qquad \vec{v} = (0, 2, 0)$$

Solución: De la expresión anterior

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

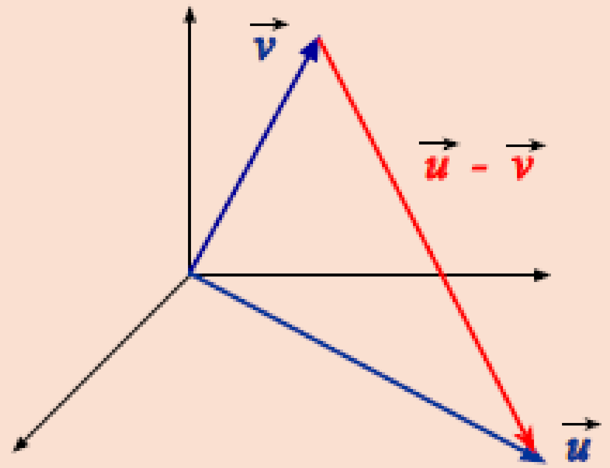
$$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$$

□

1.2. Vectores ortogonales

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en (figura). Diremos que son **perpendiculares** u ortogonales si se satisface el teorema de Pitágoras:

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} - \vec{v}||^2$$



Aplicando la ecuación, la condición se transforma en

$$\begin{aligned} (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) \quad & +(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) = & (3) \\ = \quad & (u_1 - v_1)^2 + \cdots (u_n - v_n)^2 & (4) \end{aligned}$$

El segundo miembro es

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) - 2(u_1\, v_1 + \cdots + u_n\, v_n) + (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

Así la igualdad es válida si el producto cruzado es cero. Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales $\vec{u} \perp \vec{v}$ si

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow u_1\, v_1 + \cdots + u_n\, v_n = 0} \qquad (5)$$

De la ecuación anterior nos interesa el miembro izquierdo, que definimos como producto escalar de dos vectores

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + \cdots + u_n\,v_n} \tag{6}$$

1.3. Norma de un vector

Observar que si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{u}$ por si mismo se obtiene el cuadrado de su norma o longitud:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = ||\vec{u}||^2 \tag{7}$$

o dicho de otra forma, la norma de un vector es la raíz positiva de su producto escalar

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \tag{8}$$

1.4. Ángulo de dos vectores

Del teorema del coseno se tiene

$$||\vec{v}-\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{u}||^2 - 2\,||\vec{v}||\,||\vec{u}||\,\cos\theta \tag{9}$$

donde θ es el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por otra parte

$$(\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{v}\vec{v} - 2\,\vec{v}\vec{u} + \vec{u}\vec{u} = ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{v}\vec{u} + ||\vec{u}||^2 \tag{10}$$

Igualando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\cos\theta} \tag{11}$$

que nos da una segunda definición del producto escalar. Por ello se obtiene que el ángulo θ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}} \tag{12}$$

Ejemplo 1.2. Determinar el ángulo de los vectores de R^3, $\vec{u}=(2,1,-1)$ y $\vec{v}=(0,1,3)$.

Solución: Tenemos:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{(2,1,-1)\cdot(0,1,3)}{||(2,1,-1)||\,||(0,1,3)||} = \frac{-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}}$$

y de esto bastaría hallar

$$\theta = \angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}}$$

□

Ejercicio 1. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-3,5)$ y $\vec{v}=(6,-1,0)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m,2,3)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

Ejercicio 2. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que,

$$||\vec{u}|| = 9 \qquad (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = 17$$

calcular la norma del vector $\vec{v}$.

b) ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores del espacio sea cero, sin que ninguno de ellos sea el vector nulo?

c) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$ determina el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$.

d) Si la norma del vector $||\vec{u}|| = 2$, ¿cuál es la norma del vector $3\,\vec{u}$?

e) A partir del vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$, encuentra un vector unitario con la misma dirección de $\vec{u}$.

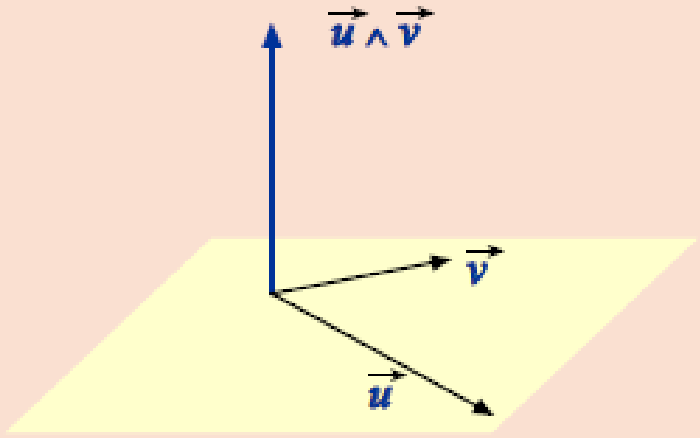
2. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores en el espacio R^3 tiene su origen en la búsqueda de un vector ortogonal a dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Designaremos el producto vectorial por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y su expresión corresponde a:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{13}$$

Esta expresión es más cómoda usando una notación de determinante, si bien no es un determinante.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$



2.1. Propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
2. La norma del producto vectorial es:

$$\boxed{||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \text{ sen } \theta} \tag{14}$$

2.2. Área de un paralelogramo

Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ dos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en A. Se forma un paralelogramo como en la figura.

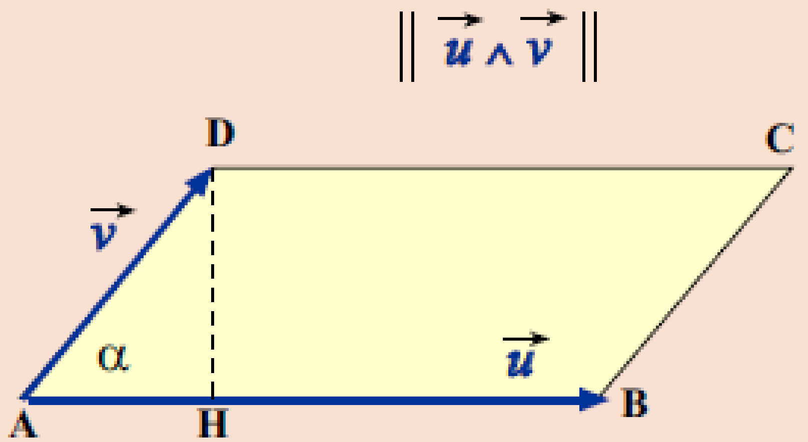
Area del paralelogramo

$$ABCD = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{DH}||$$

Como

$$||\overrightarrow{DH}|| = ||\overrightarrow{AD}|| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Area} = ||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AD}|| \cdot \operatorname{sen}\theta$$



$$\boxed{\text{Area } ABCD = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||} \tag{15}$$

Ejemplo 2.1. Hallar el producto vectorial de $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 2)$.

Solución:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,\vec{i} - 4\vec{j} - 1\,\vec{k} = (3, -4, -1)$$

□

Ejemplo 2.2. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) El área de paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Solución:

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\,\vec{i} - 14\vec{j} + 7\,\vec{k} = (7, -14, 7).$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el producto vectorial calculado.

c) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por la norma del producto vectorial, luego

$$\text{area} = ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = 7\sqrt{6}$$

□

Ejercicio 3. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Siendo $u(1, 2, 1)$ y $v(1, 0, 2)$, comprobar que el producto vectorial de

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

b) ¿Cúal es el producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes?

c) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $||\vec{u}|| = 5$ y $||\vec{v}|| = 2$, y además $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calcula $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

3. Producto mixto

La mezcla de los productos ya vistos, producto escalar y producto vectorial, nos conduce al producto mixto de tres vectores. Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se define su producto mixto, como

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})} \tag{16}$$

3.1. Expresión analítica

Sean los tres vectores de R^3, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, aplicando las expresiones del producto escalar y vectorial obtenemos:

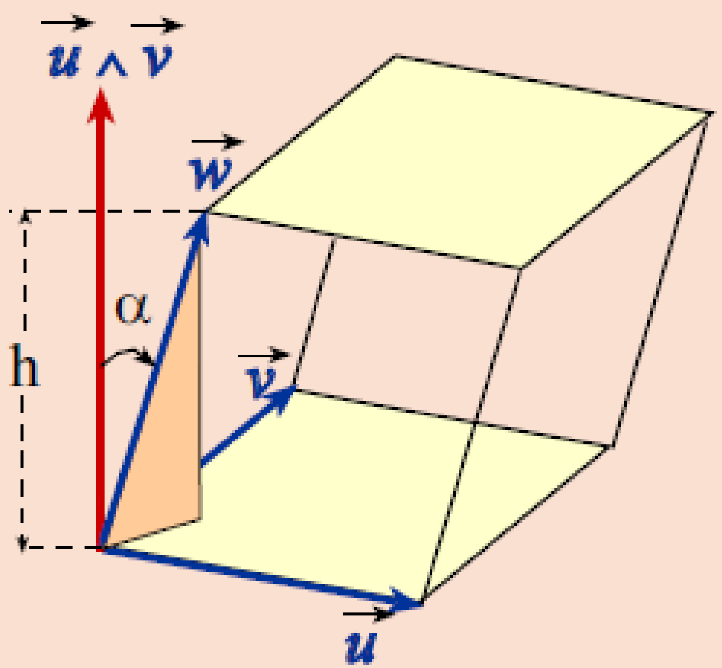
$$\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Que corresponde al desarrollo de un determinante formado por los tres vectores, luego de forma cómoda, el producto mixto se puede escribir

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}} \tag{17}$$

3.2. Interpretación geométrica.

Tomando los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, por traslación se puede construir un paralelepípedo con volumen $V = S\,h$, siendo S la superficie de la base y h la altura.



De (15) se tiene que la superficie de la base es

$$S = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||$$

y en la figura se aprecia que la altura

$$h = ||\vec{w}|| \cos \alpha$$

Luego

$$\begin{aligned} V &= ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos \alpha \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \end{aligned}$$

Por tanto volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores, (en valor absoluto, pues el determinante puede ser negativo y el volumen se toma positivo).

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Test. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores de R^3 y $\alpha \in R$ un número real. Tiene sentido la expresión

$$\alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

(a) Verdadero (b) Falso

Inicio del Test Indicar si las siguientes expresiones entre productos de vectores corresponden a un vector, un número o no tienen sentido:

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada
2. $\vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada
3. $\vec{u} + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada
4. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada
5. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada
6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 3\,\vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada