Universidad Católica del Maule
Facultad de Ciencias Básicas
Magíster en Didáctica de la Matemáticas

Informe: Elementos del Triángulo

Cátedra: Didáctica de las Formas Planas y Volumétricas
Profesor: Dr. Carlos Caamaño E.
Alumno: Juan Carlos Cárcamo
Semestre II

Talca, otoño de 2018

Índice

Introducción.

El presente informe, se desarrolla en el contexto de la Cátedra “Didáctica de las Formas Planas y Volumétricas” correspondiente al plan de formación de Magíster en Didáctica de las Matemáticas que Imparte la Universidad Católica del Maule.

Se presentan los elementos secundarios del triángulo: bisectriz, mediatriz, mediana, transversal de gravedad y altura. Ante cada elemento del triángulo se presenta una breve definición, acompañada del desarrollo manual con regla y compás de cada construcción.

Posteriormente, se analiza cada elemento antes señalado, por medio de sus propiedades y características utilizando figuras de apoyo elaboradas con el software de uso libre denominado C.A.R. Regla y Compás.

Bisectrices.

La bisectriz es el rayo que dimidia cada ángulo interior de un triángulo. Por lo tanto divide cada ángulo interior en dos ángulos de igual medida.
Las 3 bisectrices se intersectan en un punto denominado incentro qué a su vez permite inscribir una circunferencia en el interior del triángulo.

Demostración.

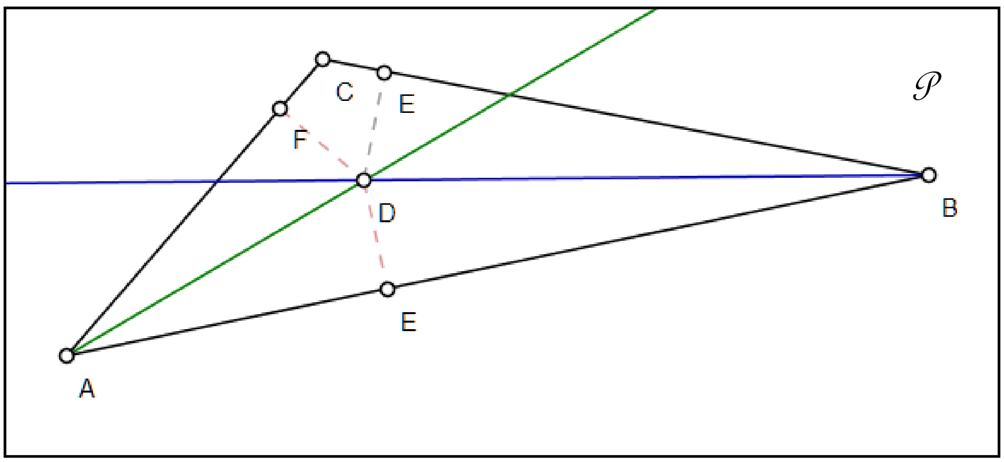

Figura 1

Dados tres puntos no colineales en el plano P, a los cuales denominaremos A, B y C en sentido levógiro, trazaremos el triángulo ABC uniendo dichos puntos; dando origen a un triángulo de vértices A, B, C y cuyos lados se corresponden con los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.

Se traza un rayo con origen en el punto A de tal forma que dimidie el ángulo CAB; del mismo modo se traza un rayo con origen en el punto B de forma que dimidie el ángulo ABC. Ambos rayos se intersectan en un punto D.

El punto D pertenece a la bisectriz de CAB, por lo tanto se encuentra equidistante de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$, por lo que al trazar segmentos perpendiculares desde D a cada uno de estos lados, ambos tendrán la misma medida: $\overline{DE}$ = $\overline{FD}$.

De forma análoga, sabemos que el punto D pertenece a la bisectriz del ángulo CAB por tanto se encuentra equidistante de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; por lo tanto al trazar una perpendicular al lado $\overline{BC}$ desde el punto D tendremos: $\overline{DE}$ = $\overline{FD}$ = $\overline{ED}$.

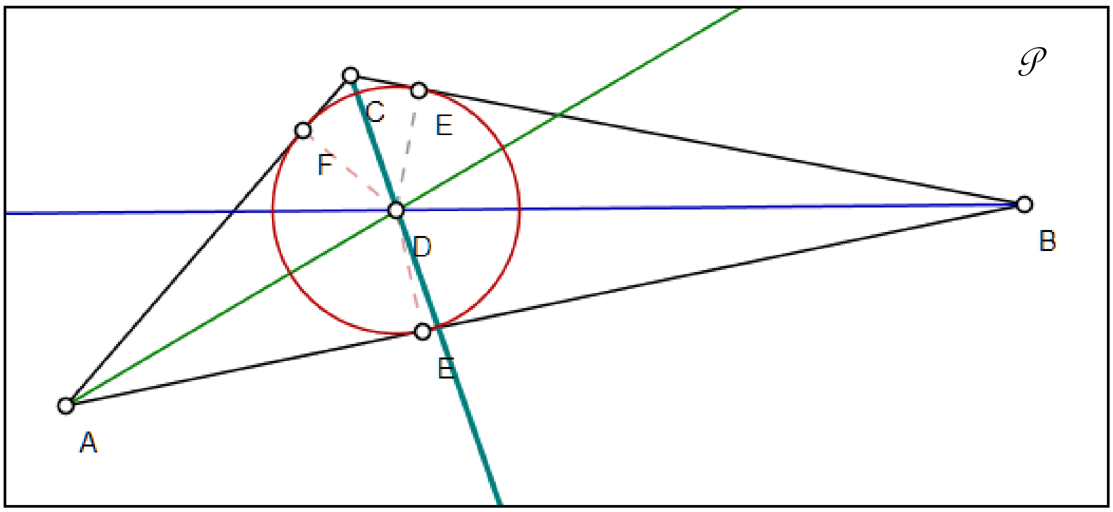

Figura 2

Luego, como el punto D está a la misma distancia del lado $\overline{BC}$ y del lado $\overline{CA}$ sabemos que forma parte de la bisectriz del ángulo BCA.

Además, como el punto D se encuentra equidistante de los tres lados del triángulo, es el centro de la circunferencia inscrita en él.

Mediatrices o Simetrales

Corresponden a las rectas perpendiculares a cada lado de un triángulo pasando por su punto medio.
Las mediatrices se cortan en un punto denominado circuncentro, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Demostración

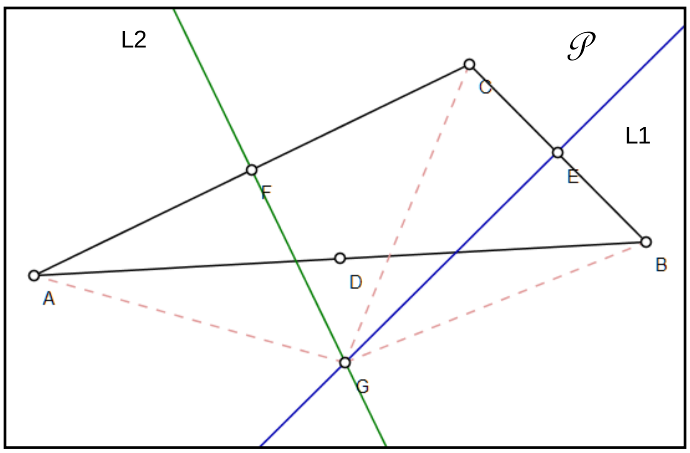

Figura 3

Dados tres puntos no colineales en el plano P, a los cuales denominaremos A, B y C en sentido levógiro, trazaremos el triángulo ABC uniendo dichos puntos; dando origen al triángulo de vértices A, B, C y cuyos lados se corresponden con los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.

Ubicamos los puntos D, E y F puntos medios de cada lado. Trazamos las mediatrices L1 perpendicular al lado $\overline{BC}$ pasando por E y L2 perpendicular al lado $\overline{CA}$ pasando por F. Ambas mediatrices se cortan en el punto G.

EL punto G forma parte de L1 por lo que se encuentra equidistante de los vértices B y C ($\overline{GB}$ = $\overline{CG}$) , pero también pertenece a L2 por lo que se encuentra equidistante de los vértices A y C; entonces tenemos que $\overline{GB} = \overline{CG} = \overline{AG}$.

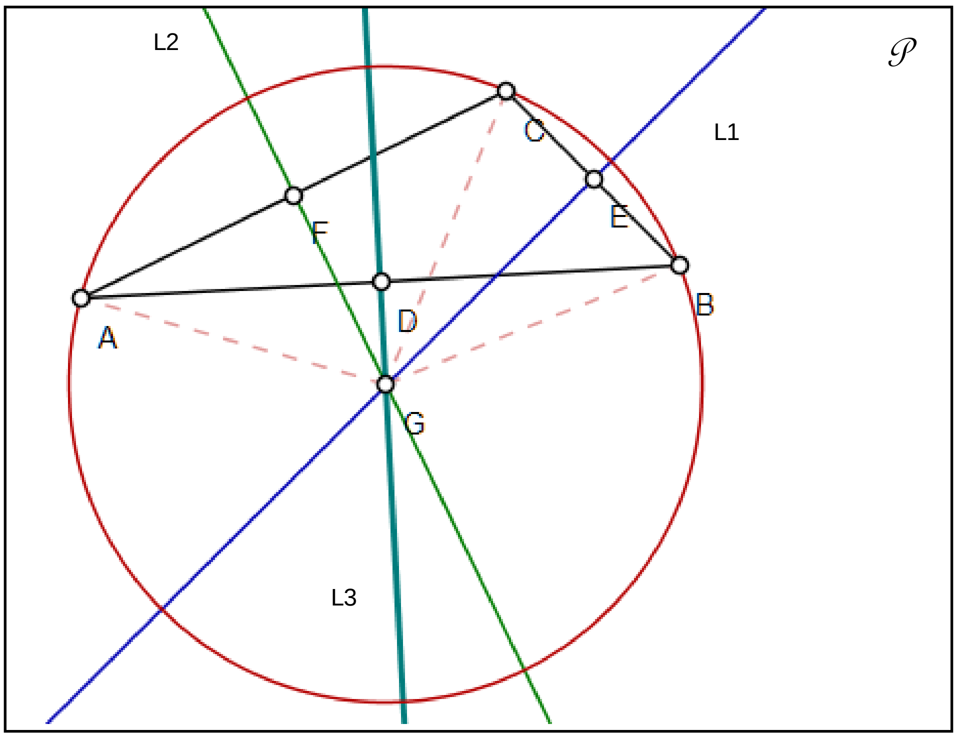

Figura 4

Luego, el punto G, al encontrarse equidistante de los puntos A y B pertenece a la mediatriz del lado $\overline{AB}$ trazada como L3.

Además como sabemos que G se encuentra equidistante de A, B y C; por lo tanto es el centro de la circunferencia en que se inscribe el triángulo ya que pasa por los tres vértices de este.

Medianas

Son los segmentos que unen los puntos medios de los lados de dos en dos.

Las medianas dan origen a 4 triángulos congruentes al interior del triángulo original y que se encuentran en proporción 1 es a 2 respecto a este.

Demostración

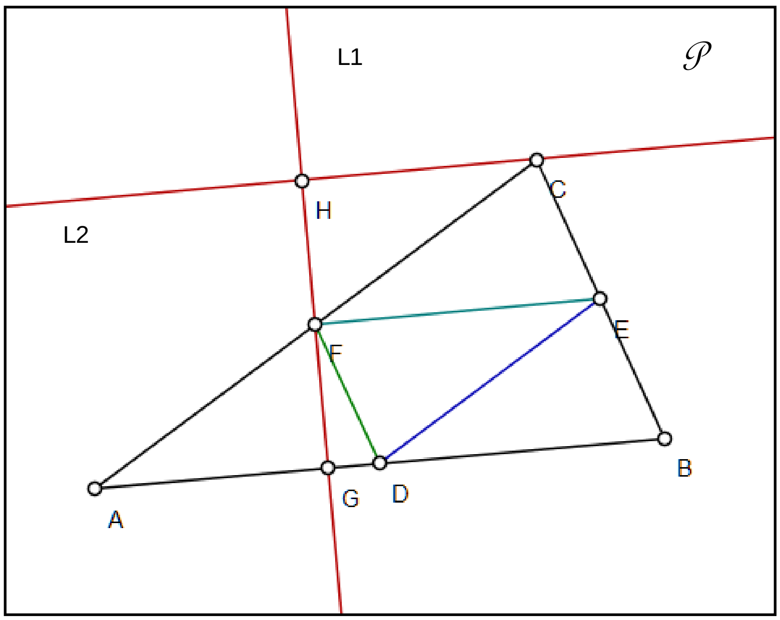

Figura 5.

Dados tres puntos no colineales en el plano P, a los cuales denominaremos A, B y C en sentido levógiro, trazaremos el triángulo ABC uniendo dichos puntos; dando origen al triángulo de vértices A, B, C y cuyos lados se corresponden con los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.

Ubicamos los puntos D, E y F puntos medios de cada lado. Uniendo los puntos medios encontramos las medianas en los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FD}$.

Trazamos L1 perpendicular al lado $\overline{AB}$ pasando por el punto F. Luego trazamos L2 perpendicular a L1pasando por el punto C. Por lo tanto L2 es paralela al lado $\overline{AB}$.

Luego, los triángulos AGF y FCH son congruentes por criterio ALA: <GAF≅<FCH ya que son alternos internos, segmento $\overline{AF} \cong \overline{FC}$ ya que F punto medio de $\overline{AC}$ y <GFA≅<CFH opuestos por el vértice. Por lo tanto $\overline{HF} \cong \overline{FG}$ y punto F equidistante de segmento $\overline{AB}$ y L2.

Análogamente se puede demostrar que el punto E se encuentra equidistante de segmento $\overline{AB}$ y L2. Por lo tanto el segmento $\overline{EF}$ \\ $\overline{AB}$.

De la misma forma podemos demostrar que cada mediana es paralela a uno de los lados del triángulo: $\overline{FD}$ \\ $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ \\ $\overline{CA}$.

De esta forma, tenemos el paralelogramo DBEF con lo podemos determinar que $\overline{FE} \cong \overline{DB}$ y por lo tanto corresponde a ½ de $\overline{AB}$.

Con el mismo procedimiento anterior demostramos que $\overline{DE}$ corresponde a ½ de $\overline{CA}$ y $\overline{FD}$ corresponde a ½ de $\overline{BC}$. Además <DEF ≅ <FAD por lo tanto el triángulo DEF cumple criterios de semejanza LLL con el triángulo original en proporción 1 es a 2.

Además, en los triángulos ADF y DEF tenemos: $\overline{FD}$ lado común, $\overline{AD} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AF} \cong \overline{DE}$, por estructura del paralelogramo, por lo tanto son congruentes por criterio LLL.

Del mismo modo podemos demostrar que los cuatro triángulos que se obtienen al trazar las medianas son congruentes entre sí y están en razón 1:2 respecto al triángulo original.

Transversal de gravedad

Segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto a este. En un triángulo se pueden trazar tres transversales de gravedad, que se intersectan en un punto denominado baricentro o centro de gravedad.

Demostración.

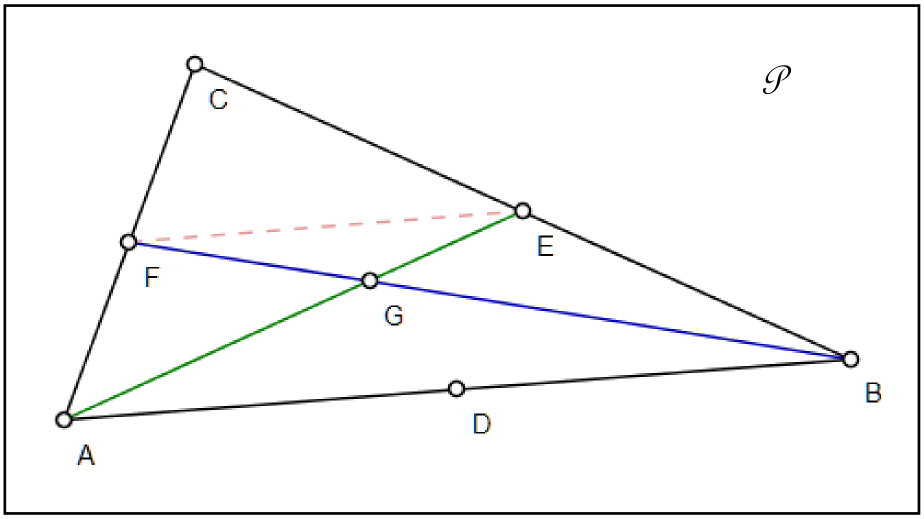

Figura 6

Dados tres puntos no colineales en el plano P, a los cuales denominaremos A, B y C en sentido levógiro, trazaremos el triángulo ABC uniendo dichos puntos; dando origen al triángulo de vértices A, B, C y cuyos lados se corresponden con los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ y $\overline{\mathrm{CA}}$.

Ubicamos los puntos D, E y F puntos medios de cada lado. Luego trazamos las transversales de gravedad $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ las que se intersectarán en el punto G.

Luego, <AGB opuesto por el vértice con <FGE, <EAB ≅ <AEF alternos internos y <ABF ≅ <EFB alternos internos; por lo tanto el triángulo GEF y el triángulo ABG son semejantes por criterio AAA y están en proporción 1 es a 2 ya que segmento $\overline{FE}$ corresponde a ½ de $\overline{AB}$. Entonces $\overline{EG}$ está en proporción 1 es 2 con $\overline{GA}$.

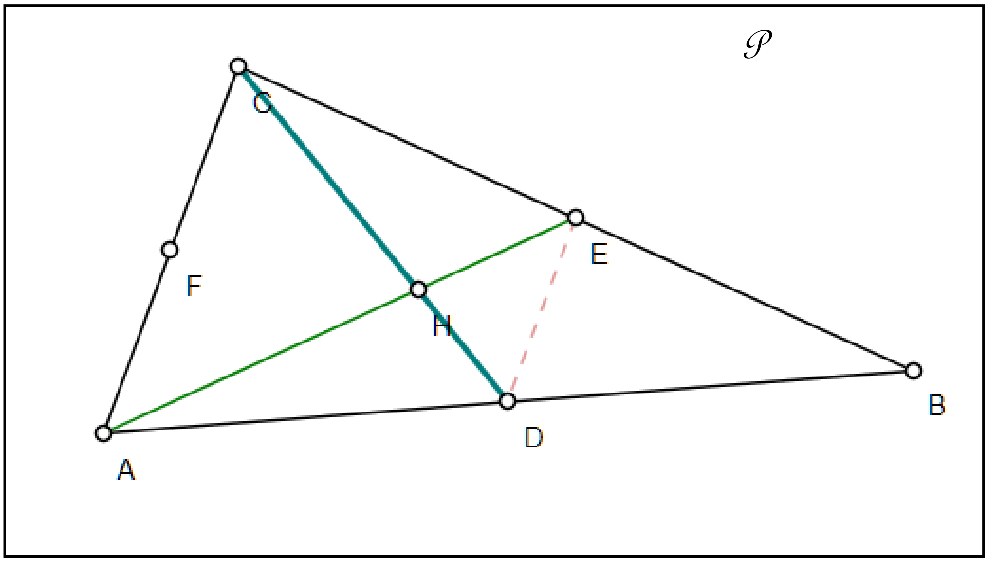

Figura 7

Utilizando el mismo razonamiento anterior, podemos ver que la transversal de gravedad $\overline{CD}$ se intersecta con $\overline{AE}$ en un punto H. Los triángulos DEH y AHC son semejantes y están en razón 1 es a 2. Por lo tanto $\overline{EH}$ está en proporción 1 es 2 con $\overline{HA}$.

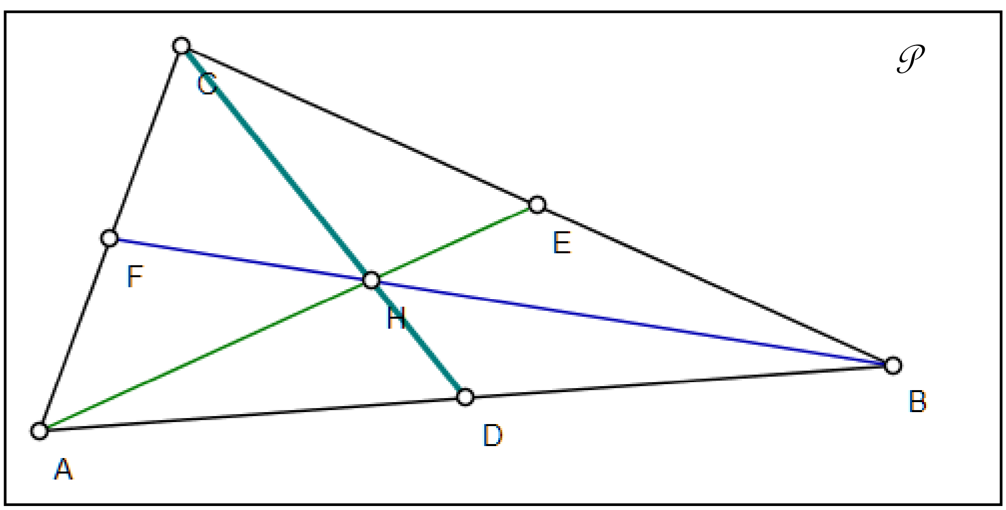

Figura 8

Entonces el punto G (Figura 6) y el Punto H (Figura 7) son el mismo punto y las tres transversales de gravedad pasan por él.

Alturas

Corresponden a los segmentos perpendiculares a los lados del triángulo o a su prolongación que se encuentran con el vértice opuesto. Las tres alturas se intersectan en un punto denominado ortocentro.

Demostración

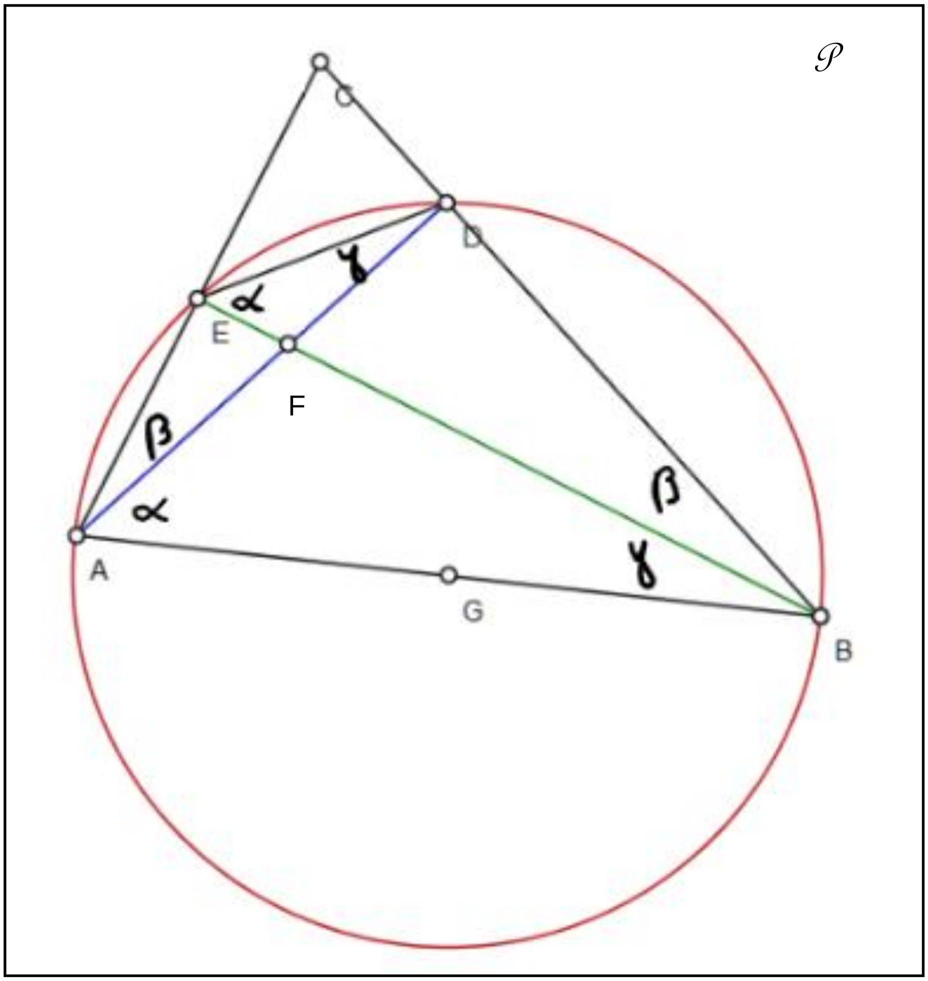

Figura 9

Dados tres puntos no colineales en el plano P, a los cuales denominaremos A, B y C en sentido levógiro, trazamos el triángulo ABC uniendo dichos puntos; dando origen al triángulo de vértices A, B, C cuyos lados se corresponden con los segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ y $\overline{\mathrm{CA}}$. Trazando las alturas $\overline{DA}$ y $\overline{EB}$, encontramos que se intersectan en el punto F. Además obtenemos los triángulos rectángulos ABD y ABE con hipotenusa $\overline{AB}$ en común. Por tanto al ubicar el punto G, punto medio de este segmento, podemos trazar una circunferencia que pasa por los puntos A, B, D y E.

Donde <DEB ≅ <DAB , <EAD ≅ <EBD y <ABE ≅ <ADE , ya que comparten el mismo arco de la circunferencia. Se designan como α, β y γ para facilitar su análisis.

Además sabemos por el triángulo ABD que α + β + γ = 90° , ya que más el ángulo recto del triángulo sumarán los 180° correspondientes a la suma de ángulos interiores de un triángulo.

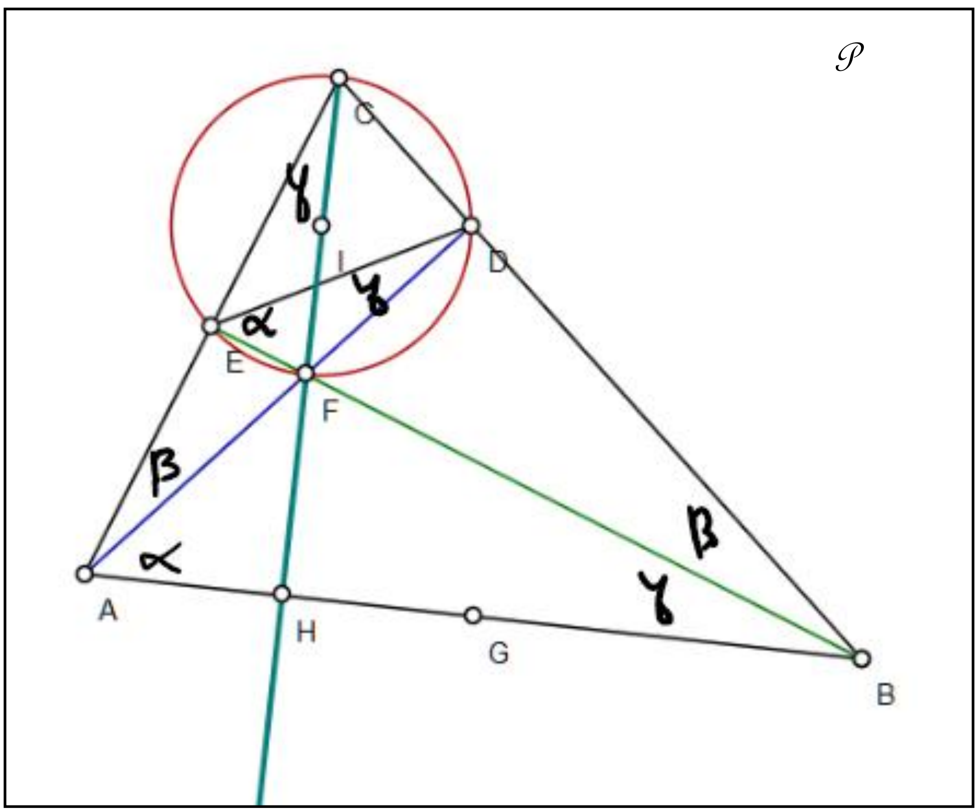

Figura 10

Por otra parte, podemos trazar el rayo $\overrightarrow{CF}$ que intersectará a lado $\overline{AB}$ en el punto H, dando origen a los triángulos rectángulos FDC y FCE. Dichos triángulos comparten la hipotenusa por lo que al ubicar el punto I punto medio de esta y trazar la circunferencia que pasa por los puntos F, D, C y E. Esto permite determinar que el ángulo <FCE ≅ <FDE ya que comparten arco.

Por lo tanto, al observar el triángulo AHC y sabiendo que $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ el ángulo <CHA debe medir 90° por lo que el segmento $\overline{CH}$ es la tercera altura del triángulo ABC.

Conclusión.

Estudiar los elementos secundarios del triángulo resulta un ejercicio de gran valor para identificar las propiedades de la figura en general y de las relaciones que se dan en ella. Además, motiva al estudiante a desarrollar justificaciones basadas en la articulación diferentes conceptos geométricos y por tanto obliga a revisar o reestudiar las propiedades de los diversos elementos de la geometría plana, transformando cada demostración en un grato desafío.

Finalmente, como docente se asume que el desafío que tenemos no radica solo en conocer y transmitir conceptos, sino en comprenderlos a cabalidad para desde esta perspectiva generar situaciones en que nuestros estudiantes puedan reconstruir cada noción geométrica con sentido y profundidad.

Bibliografía

Grothmann, Rene (2015). CaR Regla y Compás recuperado de http://car.rene-grothmann.de/

Querelle (2015). Profesor en línea. cl recuperado de http://www.profesorenlinea.cl/geometria/TriangulosElementos.htm