

Identificación y descripción de cambios cualitativos por niños de tres años

M. Lourdes Anglada ¹

Sandra Fuentes ²

María C. Cañadas ³

RESUMEN

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia sobre el pensamiento algebraico en educación infantil (www.pensamientoalgebraico.es). Observamos y describimos cómo niños de tres años percibían y expresaban el cambio cuando resolvían tareas con una máquina de funciones que realizaba cambios cualitativos. Analizamos parte de la información recogida en un experimento de enseñanza realizado en una clase de 24 alumnos. Los niños percibían los cambios y eran capaces de descubrir la regla del funcionamiento de la máquina, de expresarla verbalmente y de predecir cuál iba a ser el elemento de salida conociendo el elemento de entrada.

PALABRAS CLAVE

Cambio cualitativo, Educación infantil, Máquina de funciones, Pensamiento funcional.

¹ lourdesanglada@eummia.es

Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, España
<https://orcid.org/0000-0002-3641-7129>

² sandrafuentesm@correo.ugr.es

Universidad de Granada, España
<https://orcid.org/0000-0002-1249-0233>

³ mconsu@ugr.es

Universidad de Granada, España
<https://orcid.org/0000-0001-5703-2335>

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca dentro del early algebra, una propuesta curricular que promueve la introducción de modos de pensamiento algebraico en la matemática escolar desde educación infantil (Blanton et al., 2015; Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 2000, 2008). El álgebra se considera como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas para promover una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Blanton & Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Kaput, 2000)

Uno de los contenidos algebraicos que podemos introducir en educación infantil es la percepción y descripción del cambio (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2003). Entendemos el cambio como una idea matemática que se refiere a una transformación en la que partimos de un estado inicial y que sigue una regla para llegar a un estado final. Considerando esta definición, podemos afirmar que el cambio permea todos los bloques de contenidos de matemáticas. En este trabajo abordamos el estudio del cambio en el marco del pensamiento funcional, siendo este un modo de pensamiento algebraico cuyo foco se sitúa en las funciones, entendiendo estas como una relación de dependencia entre cantidades covariantes. En este contexto consideramos las funciones como las reglas de transformación que determinan el cambio (Cooper & Warren, 2011).

Trabajar con el cambio en educación infantil permite a los niños “comprender que la mayoría de las cosas cambia con el tiempo, que muchos cambios pueden describirse matemáticamente y son predecibles, ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas a otros campos y para entender el mundo” (NCTM, 2003, p. 94). El cambio puede ser cuantitativo o cualitativo, según si la transformación afecta o no a una cantidad. Uno de los elementos focales que establece la NCTM para niños de 3-4 años es “describir cambios cualitativos” (2006, p. 24).

Analizamos parte de la información recogida en un experimento de enseñanza con 24 niños de tres años. Implementamos cuatro sesiones e hicimos entrevistas. Los resultados que describimos en este documento corresponden a las dos primeras sesiones, las cuales se enfocaron en una tarea con una máquina de funciones que realizaba cambios cualitativos.

Con este trabajo pretendemos contribuir a la investigación sobre el pensamiento funcional de niños en educación infantil. Nuestro objetivo de investigación es describir las evidencias de pensamiento funcional de niños de 3 años a través de cómo perciben y expresan el cambio cualitativo.

MARCO DE REFERENCIA

El pensamiento funcional, que es uno de los enfoques del pensamiento algebraico, lo concebimos como “la construcción, descripción, representa-

ción y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas & Molina, 2016, p. 211).

El cambio es una idea matemática que se refiere a una transformación. Partimos de un estado inicial que se transforma siguiendo una regla o un patrón, llegando a un estado final. El reconocimiento y descripción de cambios es un conocimiento matemático importante relacionado al pensamiento algebraico en los primeros años, al que abordamos desde un enfoque de pensamiento funcional (Warren & Cooper, 2005). En el contexto funcional, el estado inicial sería la variable independiente, la regla del cambio sería la función y el estado final la variable dependiente.

Consideramos que la primera evidencia de pensamiento funcional es la identificación del cambio que se produce entre las variables involucradas, ya que para establecer la relación entre las variables es necesario identificar si hay cambio entre ellas y cuál es ese cambio (Fuentes et al., 2023).

En el caso del estudio que presentamos en este documento, el cambio era cualitativo y afectaba a un atributo de una figura. En una primera experiencia cambiaba el tamaño y después cambiaba el color. Observamos como los niños identificaban y expresaban el cambio mediante lenguaje verbal acompañado de gestos y movimiento.

En el trabajo en educación infantil es importante el contexto en el que se desarrollen las tareas y los recursos utilizados. Trabajos recientes destacan la elevada motivación que se consigue en los niños en educación infantil al contextualizar la tarea y emplear narraciones (Anglada & Cañadas, 2021; Anglada et al., 2022; Fuentes & Cañadas, 2022). Numerosos autores destacan la conveniencia de usar materiales manipulativos concretos; por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) y Warren et al. (2013) se apoyan en el uso de un material y reconocen que este juega un papel importante en los resultados obtenidos.

Un material adecuado para trabajar el cambio son las máquinas de transformaciones cualitativas y cuantitativas. Estas comenzaron a utilizarse por autores como Dienes (1976) y Canals (1989) para realizar operaciones aritméticas y transformaciones cualitativas (color, forma...). Willoughby (1997) utilizó estas máquinas para trabajar funciones en educación infantil y las llamó “máquinas de funciones” (function machines). Posteriormente, fueron utilizadas en otras investigaciones con estudiantes de educación primaria (e. g., Cooper & Warren, 2011; Moss & McNab, 2011; Torres et al., 2018). En educación infantil Warren et al. (2013) trabajaron con máquinas de funciones con niños de cinco años. En este estudio, los niños predijeron qué ocurría en casos particulares diferentes a los dos que les presentaron y llegaron a descubrir y definir verbalmente la regla que seguía la máquina, logrando así la generalización.

METODOLOGÍA

Desarrollamos una investigación de tipo exploratorio porque son escasos los estudios realizados sobre pensamiento funcional en educación infantil, particularmente para niños de 3 años; y descriptiva porque especifica características de un grupo (niños de tres años) que se somete a análisis (Hernández et al., 2010).

Llevamos a cabo un experimento de enseñanza que constó de una secuencia de 4 sesiones. Estas se desarrollaron en cuatro semanas, una sesión por semana. Además, hicimos entrevistas individuales después de las sesiones. Los participantes fueron parte de un grupo de 24 niños de tres años de una clase de educación infantil en un colegio concertado del sur de España.

El diseño inicial de las tareas y de las sesiones lo realizó el grupo de investigadores que forman parte del proyecto “pensamiento algebraico en infantil y primaria”, financiado por la Agencia Española de Investigación y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (<https://www.pensamientoalgebraico.es>). La temporalización de una sesión por semana posibilitó a los miembros del grupo de investigación analizar lo sucedido y rediseñar las siguientes sesiones, dependiendo de cómo los estudiantes resolvían las tareas. Cada sesión tenía una duración aproximada de 45 minutos y se dividían en tres fases: (a) ambientación (repaso de la sesión anterior e introducción de la tarea), (b) trabajo con la máquina y (c) reflexión. En la Tabla 1 recogemos la organización de las sesiones.

Tabla 1
Sesiones

Sesiones	Tipo de cambio	Regla de función	Datos a observar	Objetivos de investigación
Sesión 1	Cualitativo	Aumenta el tamaño	Grupo en general	Realizar las primeras observaciones de las respuestas del grupo al trabajar con el cambio (tamaño)
Sesión 2	Cualitativo	Cambia el color: la figura entra en color y sale en tonos grises	Grupo en general	Observar las respuestas del grupo al trabajar con el cambio (color) Describir cómo perciben y cómo expresan el cambio
Sesión 3	Cuantitativo	$f(n) = n+1$ Aumenta la cantidad	Grupo en general	Observar las respuestas del grupo al trabajar con el cambio cuantitativo
Sesión 4	Cuantitativo	$f(n) = n+1$ Aumenta la cantidad	Grupo en general	Observar las respuestas del grupo al trabajar con el cambio cuantitativo Describir cómo perciben y cómo expresan el cambio

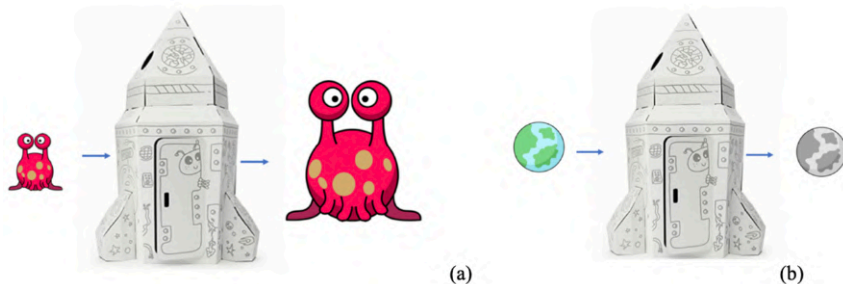
La intervención en el aula la llevaron a cabo tres investigadoras. Dos de las autoras de este trabajo actuaron como investigadoras docentes y otra más se metió en la máquina (un cohete del tamaño de los niños), grabó y sirvió de apoyo en toda la sesión. La tutora de la clase permaneció y ayudó en la gestión del aula, pero no se implicó desde el punto de vista investigador.

Grabamos la información en vídeo y registramos por escrito las observaciones relativas a las intervenciones en el aula. Utilizamos una cámara fija ubicada al fondo del aula y una cámara móvil para grabar situaciones de alumnos concretos que pudieran ser relevantes para la investigación. Para el análisis de los vídeos, teniendo en cuenta que los niños tienen 3 años, nos enfocamos en las verbalizaciones, acompañadas de los gestos y movimientos que hacían.

Los materiales que utilizamos fueron un cohete de cartón en el que cabía una persona, quien hacía las veces de máquina función, y figuras de objetos relacionados con el espacio. En la Figura 1 podemos observar un ejemplo de este material. En la primera sesión, el cambio afectaba a la variable tamaño, las figuras que entraban eran pequeñas y salían grandes (ver Figura 1a). En la segunda sesión, la variable era el color, las figuras entraban con color y salían en tonos de grises (ver Figura 1b). Diseñamos el material de forma que ambas variables fueran dicotómicas.

Figura 1

Ejemplo de transformaciones de la máquina de funciones: tamaño y color



Partimos de una narración cuya protagonista era una niña que soñaba con ser astronauta, contextualizando, de este modo, las tareas en el espacio. En las dos primeras sesiones seguimos el mismo proceso. En la zona de asamblea del aula ordinaria situamos el cohete en el que se metió una de las investigadoras. Los niños se sentaron en el suelo formando un semicírculo alrededor del cohete que les presentamos como una máquina mágica. Les repartimos a cada niño una figura y empezamos a llamarlos uno a uno para que introdujeran su figura por una ventana^[1] del cohete. Al introducir una

[1] Siempre llevamos a cabo las acciones de izquierda a derecha. La figura entra por la ventana situada a la izquierda del niño que está frente a la máquina y sale por la de la derecha.

figura, la máquina hacía ruido, y al sonar un timbre salía otra figura. Al principio, no preguntamos nada para ver qué expresaban los niños de forma espontánea. Después de varios casos, cuando un niño metía su figura preguntábamos si sabían lo que iba a pasar. Preguntábamos a todos en general; aunque era un niño cada vez el que metía la figura, todos participaban. Cuando todos los niños habían metido sus figuras, los sentamos en asamblea y les pedimos que nos contaran qué había pasado.

RESULTADOS

En la primera sesión, los tres primeros niños que recogían sus figuras de la máquina decían: —*Grande, es grande*—. Preguntamos entonces qué es lo que hacía el cohete, pero no respondían. Los niños siguieron metiendo sus figuras, y al preguntarles antes de meterlas si sabían lo que iba a pasar, algunos decían: —*Grande*—, que se ponen grandes.

En la asamblea, ya sin usar el material, al preguntar qué hacía la máquina empezaron a responder igual que cuando trabajaban con él: —*Grande, que se ponen grandes*—. Los gestos y la manipulación de materiales se sumaban a las conversaciones. Si bien muchos niños pudieron identificar que la máquina cambiaba el tamaño de las figuras, varios experimentaron dificultades para describir específicamente lo que estaba sucediendo, y sus descripciones carecían de precisión.

El siguiente fragmento de conversación es un ejemplo de las respuestas de los niños.

Investigadora: *¿Qué es lo que hace el cohete?*

Todos: *Hace ruido*

Investigadora: *¿Y por qué hace ruido?*

Álvaro^[2]: *Porque está trabajando*

Investigadora: *¿En qué trabaja la máquina?*

Álvaro: *En poner las cosas grandes*

Cuando el foco lo poníamos en lo que entraba en la máquina, es decir, cuando una figura salía de la máquina y preguntábamos a los niños cómo era la que entró, muy pocos respondían. En la asamblea, uno de los niños se levantó y, acompañándose del movimiento de sus manos, dijo que su luna entró pequeña y se volvió grande (ver Figura 2).

Al principio de la sesión 2, con los primeros casos particulares, los niños seguían con la idea de que el cohete cambiaba el tamaño. Pronto, la mayoría se dio cuenta de que el cambio consistía ahora en pasar de color a grises, aunque dos niños siguieron todo el tiempo refiriéndose al cambio de tamaño. Cuando les preguntábamos por un caso específico, respondían correctamente. Podemos ver un ejemplo en el siguiente diálogo.

[1] Los nombres utilizados para los niños son ficticios.

Investigadora: *¿Cuál es tu figura?*

Ana: *Un sol*

Investigadora: *¿Y cómo es este sol?*

Todos: *Grande... bonito... amarillo...*

Investigadora: [Mientras el sol está dentro de la máquina] *¿Qué va a salir ahora?*

Todos: *Blanco, gris, grande...*

Ana: *Va a salir gris.*

Figura 2

Niño explicando el funcionamiento del cohete



En cambio, tenían dificultad para responder cuando les preguntábamos qué hacía la máquina. Buscábamos que dieran una regla, que generalizaran. Solo un niño, de forma bastante imprecisa, da una respuesta. Podemos verla en el siguiente diálogo.

Investigadora: *¿Qué es lo que hace el cohete?*

Todos: *Ruido*

Investigadora: *Sí, es verdad. Pero, ¿por qué hace ese ruido? ¿En qué trabaja el cohete?*

Todos: [Silencio]

Investigadora: *¿Qué pasaba con las figuras que entraban en el cohete?*

María: *Que el cohete lo ha "ponido" gris.*

CONCLUSIÓN

Nuestro objetivo de investigación era describir las evidencias de pensamiento funcional de niños de 3 años a través de cómo perciben y cómo expresan el cambio cualitativo. Como es normal a esta edad, aunque son conscientes del cambio, tienen dificultades para expresarlo, pero podemos afirmar que la mayoría de los niños los perciben y son capaces de descubrir la regla del funcionamiento de la máquina y de predecir cuál va a ser el elemento de salida, conociendo el elemento de entrada. Algunos niños consiguieron expresar el cambio utilizando el lenguaje verbal, acompañado de gestos y movimiento como veíamos en la Figura 2. Consideramos que esto es una primera evidencia de pensamiento funcional (Fuentes et al., 2023).

Cuando poníamos el foco en la salida y preguntábamos por la entrada, eran muy pocos los que respondían, y los que lo hacían se expresaban con poca precisión. Esto era de esperar porque una característica de los niños de estas edades es la irreversibilidad del pensamiento.

La mayoría de los niños se involucraron en la tarea y mantuvieron la atención durante toda la sesión. En otros estudios recientes con niños de educación infantil se destaca la motivación que se alcanza al contextualizar la tarea, emplear narraciones y usar material manipulativo (Anglada & Cañadas, 2021; Anglada et al., 2022, Fuentes & Cañadas, 2022) nuestro trabajo corrobora esta conclusión.

La mayoría de investigaciones sobre pensamiento funcional en educación infantil realizadas hasta el momento hacen referencia a niños de 5 años (e.g., Anglada et al., 2022, Castro et al., 2017; Warren et al., 2013) y algunas a niños de 4 años (e.g., Fuentes & Cañadas, 2022), pero todavía falta por explorar el pensamiento funcional en niños de 3 años. Este trabajo es una primera aproximación al pensamiento funcional en niños de esta edad.

Este estudio nos proporciona un ejemplo de tareas que pueden usar los maestros en el aula y con las que es posible introducir nociones algebraicas con niños de 3 años.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado como parte del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

REFERENCIAS

- Anglada, M. L., & Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125–132). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. <https://bit.ly/4adutTj>
- Anglada, M. L., Cañadas, M. C., & Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149–157). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. <https://bit.ly/4aeXIFc>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>

- Blanton, M. L., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen, & A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen University College.
- Blanton M. L., & Kaput J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Canals, M. A. (1989). *Per una didáctica de la matemática a l'escola*. I. Parvulari. Eumo.
- Cañadas, M. C., & Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares.
- Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). National Council of Teachers of Mathematics-Information Age Publishig.
- Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. Edma 0–6: *Educación Matemática en la infancia*, 6(2) 1–13. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13>
- Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_12
- Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide.
- Fuentes, S., Cañadas, M. C., & Anglada, L. (2023). Cambio en variables cuantitativas por alumnos de 4 años desde un enfoque funcional. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E., & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 243–250). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. <https://bit.ly/4a5IAdb>
- Fuentes, S., & Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269–276). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. <https://bit.ly/43Haj1h>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación* (5° ed.). McGraw Hill.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates.
- Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277–301). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática* (Trad. Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES). National Council of Teacher of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal ponts*. NTCM.
- Torres, M. D., Cañadas, M. C., & Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574–583). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. <https://bit.ly/49hfVAv>
- Warren, E. & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150–162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Warren, E., Miller, J., & Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, 7(2), 75–84. <https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.6131>
- Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 314–318. <https://doi.org/10.5951/TCM.3.6.0314>