

Evidencias de pensamiento funcional en alumnos de 3 años: trabajo con una máquina de funciones

Sandra Fuentes¹, Lourdes Anglada² y María C. Cañadas³

¹ Universidad de Granada, España; sandrafuentesm@gmail.com

² Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, España; lourdesanglada@eummia.es

³ Universidad de Granada, España; mconsu@ugr.es

Este trabajo se enmarca en una línea de investigación sobre pensamiento algebraico desarrollada en España (www.pensamientoalgebraico.es). Indagamos sobre el pensamiento funcional que evidenciaban los alumnos al trabajar con una máquina de funciones en educación infantil. Para este estudio, entrevistamos a 4 alumnos de 3 años y les planteamos una tarea contextualizada que involucraba la función lineal $f(n)=n+1$. El contexto fue el aumento de la cantidad de bolas en un cucurucho de helado que se producía al pasar por una máquina. Analizamos las respuestas de los niños en las entrevistas en busca de verbalizaciones o gestos que evidenciaran la regla del cambio. Encontramos que los alumnos expresaron el cambio de diferentes formas como: "sale un helado más grande" o "el helado tiene más bolas".

Palabras clave: Early algebra, Educación infantil, Máquina de funciones, Pensamiento funcional.

Introducción

Esta investigación está inmersa en la propuesta curricular *early algebra*, la cual propone trabajar tareas algebraicas desde infantil. Esto supone desarrollar en el aula diferentes habilidades de pensamiento algebraico como la observación, argumentación y generalización. El National Council Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) también propone la introducción del álgebra desde educación infantil, destacando la necesidad de que los niños discutan, argumenten, exploren y, sobre todo que se les exponga a situaciones desafiantes que los hagan pensar matemáticamente.

Nos centramos en el pensamiento funcional, un tipo de pensamiento algebraico. Específicamente, abordaremos el pensamiento funcional, el cual nos permite analizar la relación de covariación entre dos o más conjuntos. Son muy pocas las investigaciones que encontramos en torno al pensamiento funcional en infantil, la mayor parte de ellas son con alumnos de último curso de infantil, con edades entre los 5 y 6 años (Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al, 2017; Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2022; Morales et al, 2016). Esta investigación aporta evidencias del pensamiento funcional de alumnos de primer curso de educación infantil.

El objetivo de investigación que abordaremos en este documento es describir las evidencias de pensamiento funcional mostradas por alumnos de 3 años al enfrentarse a una tarea de generalización que involucra la función lineal $f(n)=n+1$.

Marco conceptual y antecedentes

El pensamiento funcional es un enfoque del pensamiento algebraico cuyo objetivo principal es el estudio de las funciones y las relaciones matemáticas asociadas a ellas. Cañadas y Molina (2016) definen el pensamiento funcional como un proceso cognitivo que forma parte del pensamiento algebraico, basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (p. 210).

Evidenciamos pensamiento funcional cuando los alumnos hacen explícita la relación entre las variables, y esto puede hacerse mediante el trabajo con casos particulares. Esta relación puede ser expresada a través de diferentes representaciones: dibujos, símbolos, gestos o verbalizando, partiendo de casos concretos y llegando a la generalización de la relación (Fuentes, 2014).

Uno de nuestros principales antecedentes evidencia pensamiento funcional en niños de 4 años. Se trata de un estudio de casos, en el cual se le plantean tareas de generalización que involucran las funciones lineales $f(n)=n$ y $f(n)=3n$ a una niña de esta edad. Ella logró la generalización y verbalizó la relación funcional entre las variables involucradas en las dos tareas (Fuentes y Cañadas, 2022), en sus forma directa e inversa. En otra investigación, en un entorno tecnológico, los alumnos descubrieron la regla general que utilizó el robot programable para llegar a un casillero específico, según el número de palmadas que da la investigadora (Anglada y Cañadas, 2021).

Metodología

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al., 2010). Es descriptivo ya que con el análisis de los datos describiremos los procesos que llevan a cabo los alumnos de 3 años al resolver la tarea planteada y exploratorio por la escasa literatura que encontramos en relación al pensamiento funcional en educación infantil.

Las entrevistas son parte de una investigación más amplia sobre pensamiento funcional en infantil. Realizamos entrevistas individuales a 4 niños de 3 años, elegidos entre un grupo de 24 alumnos del aula regular, en donde anteriormente habíamos realizado un experimento de enseñanza de 4 sesiones sobre la misma temática. Los alumnos fueron elegidos por sus aportaciones en la intervención hecha con el gran grupo. En la Tabla 1 resumimos las variables de tarea que definen el trabajo realizado durante las cuatro sesiones y en la entrevista.

Tabla 1: Descripción de las sesiones en 3 años

Variables de tarea	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Entrevista
Contexto	Viaje al espacio	Viaje al espacio	Heladería	Heladería Uso de tablas	Heladería
Tipo de variable	Cualitativa	Cualitativa	Cuantitativa	Cuantitativa	Cuantitativa
Cambio	Cualitativo (Tamaño)	Cualitativo (Color)	Cuantitativo (+1)	Cuantitativo (+1)	Cuantitativo (+1)

Las sesiones y las entrevista fueron diseñadas por el equipo de investigación del proyecto. El objetivo que se perseguía con la tarea propuesta era analizar si los niños apreciaban el cambio que ocurría dentro de la máquina de funciones. Para que los alumnos observasen el cambio, se

introducían en la máquina de funciones cucuruchos de helado con distintos números de bolas y, dentro de la máquina, la investigadora le añadía una bola más sin que los niños lo vieran. Se les pedía a los niños que explicaran lo que observaban y que representaran la información en una tabla de funciones (ver Figura 1). Así aparecieron datos pareados de número de bolas que tenía el helado cuando entraba y el que tenía cuando salía de la máquina. Por ejemplo, entraba un helado con 2 bolas y salía un helado con 3 bolas. Utilizamos números menores a 10 y les planteamos en orden no consecutivo para evitar la recurrencia. Utilizamos la representación tabular para ordenar los valores concretos empleados en la tarea. Por último, les dimos a los alumnos un folio en blanco para que dijieran que pasó en la sesión. Cada entrevista tuvo una duración aproximada de 20 minutos y estuvo a cargo de una de las autoras de este trabajo.

El material usado en las entrevistas consistía en: (a) juguetes de conos y bolas de helados y la caja de funciones donde ocurría el cambio, (b) figuras de los conos y bolas de helados y un panel que contenía una tabla de funciones y (c) una hoja en blanco y rotuladores para que plasmaran lo que había ocurrido en la sesión. En la Figura 1, se pueden apreciar los materiales utilizados



Figura 1. Materiales utilizados en la entrevista.

Análisis de datos, resultados y discusión

Analizamos las entrevistas de los 4 alumnos, buscando verbalizaciones o gestos que evidenciaran pensamiento funcional (Fuentes, 2014), es decir, la relación entre las variables, más allá de solo casos puntuales. A continuación, transcribimos algunos fragmentos correspondientes a cada alumno, analizamos la identificación del cambio y la estructura que establece. Utilizaremos I, para designar a la investigadora y An para designar a los alumnos, manteniendo así su anonimato.

Alumno 1

- I : ¿Qué pasa con la máquina?
 A1: Que mi helado se ponía grande cuando lo metemos en la máquina.
 I : ¿Quieres que utilicemos la máquina?
 A1: No, lo pegamos aquí (utiliza el panel que tiene la tabla de funciones y coloca un cucurucho vacío).
 I : ¿Cuántas bolas va a tener tu helado?
 A1: Mi helado tiene 2 bolas y después van a salir muchas.
 I : Pero, ¿cuántas? (se le insiste en que diga un número).
 A1: Estas (muestra con su mano 3 dedos).
 ...
 I : Pero, ¿qué hace la máquina?
 A1: Entra pequeño y salen 2 (muestra un helado con una bola y otro con dos bolas)

y después grande y después otro grande (muestra otra pareja donde un helado tiene 2 bolas y otro con 3 bolas).

I : ¿Y qué sale si entra un helado con 5 bolas?

A1: El que sale sería más grande (hace gestos con sus brazos más allá de su cabeza).

Este alumno no necesitó manipular el material concreto, se fue directamente al uso del material pictórico y la tabla de funciones, estableció la relación funcional de que salen más bolas de las que entran, en algunos casos particulares colocó una más y en otros más de una (ver Figura 2). Por tanto, la relación que percibió el alumno es que el helado que salía tenía más bolas que el que entraba.



Figura 2: Entrevista Alumno 1 y los materiales utilizados en la sesión.

En la hoja en blanco hizo la distinción de los elementos que entran y salen de la máquina de funciones, ocupando el anverso y reverso de la hoja, simbolizando las bolas de helado como líneas sobre el cucurucho que dibuja.

Alumno 2

I : Tenemos un cucurucho con una bola.

A2: Una bola... ¿Y qué va a salir?

I : Esa es la pregunta, ¿Qué crees tú que va a salir?

A2: Grande.

I : ¿Grande?

A2: Muchas bolas... como estas bolas [muestra tres bolas que están sobre la mesa]

I : Mira ahora [mete a la máquina el cucurucho con una bola de helado y dentro de la máquina coloca otra bola]

A2: Salen dos.

I : ¿Cuántas se metieron?

A2: Se metió una y salieron dos.

I : Tu dijiste que iban a salir más grande... ¿Salió más grande?

A2: No.

I : Pero... ¿Un poquito más grande?

A2: Pues sí.

...

I : ¿Y si ahora metemos un helado con 3 bolas?

A2: Va a salir más grande.

I : ¿Cuántas van a salir?

A2: Muchas [muestra sus manos abiertas].

I : ¿Cuántas?

A2: Cuatro [Muestra sus 10 dedos (ver Figura 3)]



Figura 3: Relación de correspondencia uno a uno con sus dedos

El alumno 2 trabajó con el material concreto (juguetes de helados) y con el material pictórico (láminas de cucuruchos y bolas de helados), estableció la relación funcional de que salen más bolas de las que entran, pero no cuantifica el crecimiento cuando la diferencia es de una unidad, si entran uno y salen dos no es significativo el cambio para el alumno, salieron casi las mismas que entraron, nos dice "es un poquito más grande", por eso expresa que deben salir "muchas". En la hoja en blanco hizo un cucurucho con muchas bolas de helado (5) hasta completar la hoja.

Alumna 3

- I : ¿Cuántas bolitas tiene mi cucurucho?
 A3: Una.
 I : La vamos a meter a la máquina... ¿Qué hace la máquina?
 A3: Hace dos y tres y cuatro [va mostrando sus dedos].
 I : Y si el que ingresa tiene una bola... ¿Cuántas bolas salen?
 A3: Dos.
 I : ¿Y si tiene 3 bolas?
 A3: Tres.
 I: ¿Y si metemos un cucurucho con 2 bolas?
 A3: Salen 4.
 ...
 I : ¿Y si le pongo 5...cuántos saldrán?
 A3: Diez.
 I : ¿Por qué?
 A3: Porque sí.

La alumna 3 trabajó con material concreto y simbólico. Estableció la relación de igual o mayor para los casos consultados pero no verbalizó la relación. En el folio dibujó un cono con una bola y otro con 2 bolas (ver Figura 4).

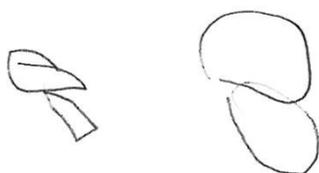


Figura 4: Dibujo del helado con las bolas de alumna 3

Alumna 4

- I : ¿Me puedes decir que hacía la máquina?
 A4: Daba muchos helados y estaba de verde.
 I : ¿Qué pasaba con los helados que salían?
 A4: Grandes.

- I : Y si entra un helado con dos bolitas
 A4: Tres [busca y pega el cucurucho con 3 bolitas]
 I : ¿Cómo es el helado que salió?
 A4: Uno, dos, tres y cuatro, son 4.
 I : Pero, ¿qué pasó con la máquina?
 A4: Grande [muestra sus brazos abiertos (ver figura 5)].
 I : Ahora tenemos un helado con una bola, ¿cómo crees que va a salir?
 A4: Muchos [busca varias figuras de bolas de helados para pegar en el panel].



Figura 5: Gestualidad al representar la relación

La alumna no trabajó con material concreto, pidió trabajar con el material simbólico y pegarlos en el panel. Esta alumna estableció la relación “mayor que”. Al consultarle por lo que hacía la máquina, contestó “grande”. En el folio dibujó varios helados sin relación. Después, cambiamos de roles y ella manejó la caja, metiendo un helado con una bola y salió uno con 5 bolitas, contestó que “se hizo mucho”. Al meter un helado con 3 bolitas, sacó uno con 6. En esos dos casos, los helados que salieron tenían muchas más bolitas de las que entraron.

En la Tabla 2 presentamos un resumen de resultados de las entrevistas.

Tabla 2. Resumen de entrevistas

Resultados	Alumno			
	A1	A2	A3	A4
Identifican el cambio	Sí	Sí	Sí	Sí
Relación que identifican	$f(n) > n$	$f(n) > n$	$f(n) \geq n$	$f(x) > n$

En la Tabla 2, observamos que los cuatro alumnos entrevistados identificaron el cambio y la relación que establecieron con los elementos que entran y salen de la máquina, es que los que salen de ella son más, sin cuantificar cuántos son.

Conclusiones

Nuestro objetivo de investigación se logró, encontrando evidencias de pensamiento funcional en las verbalizaciones y gestos utilizados por los alumnos. Fue interesante las gestualidades que utilizaban para señalar el cambio, abrían los brazos y decían "GRANDE" con mucha fuerza, tratando de darse a entender ya que aún no tienen la noción de cantidad.

Concordamos con los hallazgos encontrados por Fuentes y Cañadas (2022), pero en edades más tempranas. Los alumnos de 3 años establecieron relaciones funcionales, aunque en algún caso no cuantifiquen la relación en primera instancia, pero si después de un par de casos particulares. Todos los niños identificaron el cambio como aumento, una alumna deja abierta la posibilidad a que puedan ser iguales.

En esta investigación trabajamos con materiales manipulativos, pictóricos y simbólicos como elementos facilitadores para establecer la relación funcional entre las variables, al igual que Anglada y Cañadas (2021) nuestros alumnos logran establecer la relación entre los elementos.

Un aporte de esta investigación es mostrar evidencias que los alumnos de 3 años tratan de establecer relación entre las cantidades de objetos dos conjuntos que varían, aunque no necesariamente lo cuantifiquen. Es bueno proporcionar a los alumnos contextos desafiantes y motivadores, con preguntas que los lleven a plantear soluciones creativas. Los resultados de este estudio nos abren las puertas para poner en marcha este tipo de actividades en el aula ordinaria, aunque sabemos que no es generalizable, es posible utilizar nociones algebraicas desde edades tempranas.

Las líneas que esta investigación deja abierta, como indagar con los cursos completos, aplicar entrevistas a otros alumnos o implementar la actividad en otros niveles, está siendo abordada por el grupo de investigación (www.pensamientoalgebraico.es).

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades . En E . Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez , J. F. Ruíz y M . Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(2), 1-13.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/6263/>

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5º edición. McGraw Hill.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 59-78.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.