

## **EXPLORANDO EL TEOREMA DE VARIGNON, A PARTIR DE LA DISCUSIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

Discusión matemática; Formación de profesores; Teselaciones; Teorema de Varignon

La discusión matemática favorece una actitud positiva hacia la disciplina, genera momentos de discusión que potencia la capacidad de expresar y escuchar ideas de forma respetuosa, incentiva la curiosidad e interés por el aprendizaje de la matemática, entre otras cualidades. Dada su relevancia para el aprendizaje en matemática, estas actitudes se deben desarrollar de manera integrada con los conocimientos y las habilidades propias de los temas. Presentamos resultados de una planificación de una clase para estudiantes de Pedagogía en Educación Primaria, en el cual, a partir de distintas teselaciones del plano se exploran las características que deben cumplir los cuadrilátero para teselar el plano. Logrando que los estudiantes analicen condiciones necesarias y suficientes que deben tener los cuadriláteros para teselar el plano, elaborando razonamientos argumentativos para respaldar sus conclusiones y la validez de ellas.

**Palabras clave:** Teselaciones; Discusión matemática, Formación de profesores, Planificación de clase

## EXPLORANDO EL TEOREMA DE VARIGNON, A PARTIR DE LA DISCUSIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

En el marco de un programa para formadores de profesores denominado “Conducción de procesos de formación en matemática”, impartido por el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile y en coordinación con el Gobierno de Chile, se elabora entre formadores un proyecto que integra el Módulo de Geometría (transformaciones isométricas) y el de Discusión matemática como estrategia metodológica. La propuesta de enseñanza contiene actividades de aprendizaje que generan condiciones para que los estudiantes de Pedagogía en Educación Primaria, de forma colaborativa, exploren las propiedades que tienen los cuadriláteros para recubrir completamente el plano. En el desarrollo de la actividad, se movilizan conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales; en el entendido que la formación matemática implica aspectos cognitivos, afectivos y sociales.

La clase diseñada aborda los contenidos matemáticos referente a las transformaciones geométricas por isometrías (rotación, traslación y reflexión), condición de los polígonos para recubrir el plano, propiedades de los ángulos interiores de cuadriláteros, composición de mosaicos geométricos y el Teorema de Varignon. Teniendo como objetivo analizar la proposición *Todo cuadrilátero puede teselar el plano*, proponiendo a los estudiantes a través de la discusión matemática la generación de una secuencia argumentativa que respalde o refute la veracidad de dicha proposición.

En un curso de 3° año de carrera de Pedagogía en Educación Primaria se aplican una serie de actividades de teselaciones del plano con el objetivo de explorar las características que deben cumplir los cuadriláteros para teselar el plano. La clase implementada y analizada se organizó en las etapas que se detallan en la Tabla 1.

	Actividades	Etapas
1°	Búsqueda de información definiciones de teselación, mosaico, friso y mandala y presentación de ejemplos.	Búsqueda de las definiciones de teselación, mosaico, friso y mandala y de dos ejemplos por cada definición.
2°	Puesta en común de las definiciones para las teselaciones, mosaico, friso y mandala.	Exposición por grupos.
3°	A partir de la discusión generada se presentan distintos polígonos (triángulos equilátero y acutángulo, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular, paralelogramo) para estudiar la capacidad de teselar el plano.	Trabajo en grupo para analizar la capacidad de teselar el plano de distintas figuras geométricas.
4°	Explorando la validez de una propiedad.	Se plantea la pregunta “Cualquier cuadrilátero, cóncavo o convexo, tiene la capacidad de teselar el plano”.
5°	Analizando estrategias	Discusión plenaria sobre estrategias de resolución.
6°	Generalizando	Actividad de generalización.

A partir de una serie de preguntas a los estudiantes se explora la validez de la afirmación planteada, por ejemplo, se solicita que construyan una Tesela con forma de un cuadrilátero convexo cualesquiera; disponga y copie su cuadrilátero como molde de una teselación (al menos 6 piezas) e intente teselar el plano, ¿es posible realizar la teselación? identifique las isometrías que vinculan las teselas utilizadas; construir una Tesela con forma de un cuadrilátero cóncavo cualesquiera, entre otras. La clase se desarrolló durante dos horas, contando con la participación de 12 estudiantes. Desde el ámbito matemático y respecto a la planificación se realizaron las actividades 1 y 2 para introducir el tema de las teselaciones, luego se continuó con la actividad 3 teniendo mayor discusión la proposición “todo triángulo tesela el plano”.

Los estudiantes a partir de un trabajo concreto, realizando polígonos, fueron estableciendo que todo cuadrado tesela el plano y que todo paralelogramo tesela el plano, “cumplen con la

condición que los ángulos que concurren a un vértice es  $360^\circ$ ". A partir de ello la profesora plantea "Cómo demostrar que todo triángulo tesela el plano" esto llevó a los estudiantes a usar un razonamiento deductivo probando casos particulares. Por ejemplo, analizando si los triángulos, isósceles, equiláteros, escalenos, obtusángulo permiten teselar el plano, entonces todos lo teselerán. De este modo, los estudiantes obtienen conclusiones como "los triángulos equiláteros, escalenos e isósceles si forman un plano. Porque, por ejemplo, dos escalenos forman un triángulo obtusángulo, dos isósceles forman un cuadrado, y los equiláteros formaban un cuadrado o un pentágono o un hexágono, un hexágono" o "No, por qué los acutángulos y obtusángulos. El acutángulo si, el obtusángulo no". Esto lleva a la profesora a mostrar a los estudiantes que si un caso no se cumple entonces la proposición no sería verdadera "todo triángulo tesela el plano". Al presentarse un ejemplo de un triángulo obtusángulo que teselaba el plano un grupo concluyó que al trabajar con material concreto los triángulos no eran quizás iguales. Esto implícitamente puede llevar a reforzar la idea de congruencia que es fundamental cuando se trabajan las simetrías.

A partir de presentar los casos particulares, un estudiante formula "Todos los triángulos van a formar paralelogramos o cuadriláteros dependiendo como los ordenemos de forma simétrica o no. Por ejemplo, el obtusángulo aunque no tenga todos los lados iguales, ya, al colocar otro obtusángulo de la misma medida va a formar un paralelogramo, y ya confirmamos que un paralelogramo tesela el plano" (Figura 1).

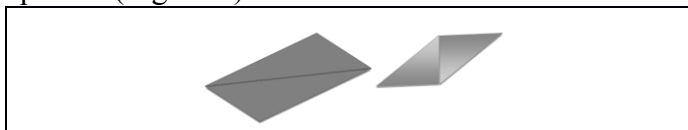


Figura 1. Paralelogramos que teselan el plano

De este modo el estudiante realizó conexiones entre ideas matemáticas, en el cual a partir de "mostrar" que todo paralelogramo o cuadrilátero tesela el plano, dedujo que todo paralelogramo puede descomponerse en triángulos, por lo cual los dos triángulos que conforman la figura al formar un paralelogramo también teselarán el plano. En el desarrollo de la clase la profesora fue precisando las formulaciones de los estudiantes, pues presentaron confusión con la medida de los ángulos interiores y los ángulos concurrentes en las teselaciones. Aspectos que había sido previsto en la planificación.

En general, la clase permitió la discusión matemática, mostrándose como una herramienta para que los alumnos realizaran conexiones entre ideas matemáticas. Como mencionan Chapin, Connor y Canavan (2013) razonar es una parte integral del hacer matemática, involucrando el razonamiento el desarrollo, justificación y generalización de ideas matemáticas que son actividades fundamentales para que los conceptos matemáticos tengan sentido y para que los estudiantes desarrollen la habilidad comprensiva lo más cercano al trabajo de un matemático. La clase ejecutada permitió llevar a los estudiantes a observar más allá de los detalles específicos de las teselaciones o de un caso particular, a observar relaciones matemáticas y para poder conversar de las similitudes y diferencias de sus propios razonamientos, acercándolos a un razonamiento matemático.

## Referencias

Chapin, S., O'Connor, C., & Canavan, N. (2013). *Classroom Discussions in Math: a teacher's guide for using talk moves to support the Common Core and more*. Math Solutions. Massachusetts.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares Matemática*. Gobierno de Chile. Recuperado de <http://www.curriculumlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html>.

Reinoso, R. (2016). *Transformaciones y Lugares Geométricos. Para la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Académica Española.