

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE GRANADA



**PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ALUMNOS DE
PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA:
UN ESTUDIO EXPLORATORIO**

Trabajo Fin de Máster presentado por

D^a Sandra Fuentes Mardones

Dirigido por la Doctora

D^a María C. Cañadas Santiago

GRANADA, 2014

El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado en el seno del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento numérico” (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas e instituciones, que de una u otra manera, han contribuido a la realización de esta investigación.

A la Doctora María C. Cañadas Santiago, por toda la paciencia y buena disposición. Principalmente por iniciarme en la labor investigadora.

Al colegio San José de Granada. Por acogernos y permitirnos el ingreso a sus aulas. A su directora Toñi, a las maestras Alicia y Montserrat, y a cada uno de los alumnos que formaron parte de esta investigación.

En especial, agradecer a mi familia, por acompañarme en esta aventura tan lejos de nuestro hogar.

INDICE

PRESENTACIÓN.....	-1-
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	-3-
1.1. Motivación del problema de investigación.....	-3-
1.1.1. Motivación personal y profesional.....	-3-
1.1.2. Motivación investigadora.....	-4-
1.1.3. Motivación curricular.....	-4-
1.2. Planteamiento del problema de investigación.....	-5-
CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES.....	-7-
2.1. <i>Early algebra</i>	-7-
2.2. Pensamiento funcional.....	-9-
2.2.1. Pensamiento funcional en los documentos curriculares	-12-
2.2.2. Funciones.....	-13-
2.2.3. Patrones.....	-15-
2.2.4. Generalización.....	-16-
2.2.5. Estrategias de resolución en problemas que involucran	-17-
relaciones funcionales.....	
2.3. Sistemas de representación.....	-19-
2.3.1. Sistema de representación verbal.....	-20-
2.3.2. Sistema de representación simbólico.....	-21-
2.3.3. Sistema de representación pictórico.....	-21-
2.3.4. Sistema de representación tabular.....	-22-
CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN.....	-25-
3.1. Objetivo general.....	-25-
3.2. Objetivos específicos.....	-25-
CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO.....	-27-
4.1. Tipo de investigación.....	-27-
4.2. Sujetos.....	-27-
4.3. Diseño de la recogida de información.....	-28-
4.4. Instrumentos de recogida de información.....	-29-
4.4.1 Diseño de la prueba escrita.....	-29-
4.4.1.1. Estudio piloto 1.....	-31-
4.4.1.2. Estudio piloto 2.....	-32-
4.4.1.3. Prueba escrita definitiva.....	-33-
4.4.2. Entrevistas semiestructuradas.....	-34-
4.5. Recogida de la información.....	-35-
4.6. Categorías para el análisis de datos.....	-37-
4.6.1. Responden.....	-38-
4.6.2. Corrección.....	-38-
4.6.3. Sistemas de representación.....	-38-
4.6.4. Estrategias.....	-38-

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS.....	-41-
5.1. Producciones de los alumnos en la prueba escrita.....	-41-
5.1.1. Tarea 1.....	-42-
5.1.1.1. Apartado A.....	-45-
5.1.1.2. Apartado B.....	-45-
5.1.1.3. Apartado C.....	-46-
5.1.1.4. Apartado D.....	-46-
5.1.1.5. Apartado E.....	-46-
5.1.1.6. Apartado F.....	-47-
5.1.1.7. Apartado G.....	-47-
5.1.1.8. Apartado H.....	-48-
5.1.2. Tarea 2.....	-49-
5.1.2.1. Apartado A.....	-52-
5.1.2.2. Apartado B.....	-53-
5.1.2.3. Apartado C.....	-53-
5.1.2.4. Apartado D.....	-54-
5.1.2.5. Apartado E.....	-55-
5.1.2.6. Apartado F.....	-56-
5.1.2.7. Apartado G.....	-57-
5.1.3. Tarea 3.....	-57-
5.1.3.1. Apartado A.....	-61-
5.1.3.2. Apartado B.....	-62-
5.1.3.3. Apartado C.....	-62-
5.1.3.4. Apartado D.....	-63-
5.1.3.5. Apartado E.....	-63-
5.1.3.6. Apartado F.....	-64-
5.1.3.7. Apartado G.....	-64-
5.2. Entrevistas individuales.....	-65-
5.2.1. Entrevista alumno 7.....	-65-
5.2.2. Entrevista alumno 12.....	-67-
5.2.3. Entrevista alumno 15.....	-69-
5.2.4. Entrevista alumno 27.....	-71-
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....	-75-
6.1. Consecución de los objetivos.....	-75-
6.2. Limitaciones de la investigación.....	-78-
6.3. Líneas de investigación abiertas.....	-78-
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	-81-
ANEXOS	
Anexo A. Estudio piloto 1 y producción del niño	
Anexo B. Estudio piloto 2 y producción del niño	
Anexo C. Prueba definitiva	
Anexo D. Entrevista semiestructurada y producción de los alumnos	
Anexo E. Producción de los alumnos en la prueba escrita	
Anexo F. Transcripción de las entrevistas	
Anexo G. Material manipulativo	

PRESENTACIÓN

La investigación aquí presentada es un Trabajo Fin de Máster realizado durante el curso académico 2013-2014, dentro del programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por la alumna Sandra Fuentes Mardones, bajo la tutoría de la Doctora María C. Cañadas Santiago.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” (FQM-193). Nuestro objetivo general de investigación es describir el pensamiento funcional de un grupo alumnos de primero de educación primaria quienes, en el momento de la recogida de información tenían edades comprendidas entre los 6 y 7 años. Los alumnos participantes en esta investigación respondieron a una prueba escrita diseñada por las investigadoras. Para complementar la información, realizamos una entrevista semiestructurada a 4 alumnos. En este informe analizamos las producciones escritas y orales de los alumnos para dar respuesta a nuestro objetivo general de investigación.

Antes de realizar la recogida definitiva de información llevamos a cabo dos pilotos, con el fin de validar los instrumentos y mejorarlos hasta lograr los instrumentos definitivos. Llevamos a cabo el primer estudio piloto a una alumna de 4 años; y el segundo estudio piloto a un alumno de 6 años. Los resultados de estos estudios nos llevaron a redactar las preguntas de forma que los alumnos entendieran nuestros requerimientos, seleccionar características de la tarea adecuada a nuestros objetivos de investigación, identificar posibles dificultades en la recogida de la información y estrategias para superarlas, identificar elementos que se debían cambiar para la recogida de información. Tras los estudios pilotos, diseñamos la recogida de información definitiva.

En la recogida de datos definitiva participaron 32 alumnos de primero de educación primaria de un colegio concertado de la ciudad de Granada en el curso académico 2013-2014. La prueba escrita consta de tres tareas con diferentes relaciones funcionales. La entrevista busca profundizar sobre las producciones de cuatro de los estudiantes en la prueba escrita y proponerles unas tareas adicionales de características diferentes a las de la prueba escrita.

Organizamos este documento en seis capítulos, los cuales presentaremos a continuación.

Dedicamos el primer capítulo al problema de investigación, presentando los intereses que nos llevan a realizar este trabajo desde los puntos de vista, personal, profesional, investigador y curricular. Por último, planteamos el problema de investigación.

En el segundo capítulo sentamos las bases teóricas en las que se sustenta nuestro trabajo, definiendo cada uno de los elementos clave en la investigación. También, hacemos mención a los antecedentes sobre el tema del trabajo, tanto a nivel nacional como internacional.

En el tercer capítulo y con base en el marco conceptual, definimos el objetivo general de investigación y su desglose en objetivos específicos.

Describimos el marco metodológico del estudio en el cuarto capítulo. Presentamos el diseño de la investigación, el diseño de los instrumentos de recogida de información, los sujetos que participaron así como la definición de las categorías para el análisis de la información.

Presentamos el análisis de datos y los resultados en el quinto capítulo. Organizamos esta información con base en los dos instrumentos diseñados para recoger la información: la prueba escrita y las entrevistas. Por tanto, combinamos un análisis cuantitativo, que hace referencia a la información recopilada del grupo de alumnos en la prueba; con un análisis cualitativo, con la información recopilada de las entrevistas.

En el sexto y último capítulo incluimos las conclusiones de este trabajo, discutiendo el logro de nuestros objetivos de investigación específicos, comparando los resultados con los de nuestros antecedentes. Además, proponemos líneas de investigación abierta, las dificultades que tuvimos en la realización de la investigación y las limitaciones que identificamos.

Por último, en los anexos incluimos información complementaria al trabajo, como son las diferentes versiones de los instrumentos de recogida de información (incluida la versión definitiva), los estudios pilotos, las producciones escritas de los estudiantes, las transcripciones de las entrevistas y los materiales manipulativos que utilizamos en las diferentes fases de nuestra investigación.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el presente capítulo detallamos el problema a investigar, así como la justificación personal, investigadora y curricular que nos lleva a su planteamiento.

1.1. Motivación del problema de investigación

El problema de investigación surge de tres contextos complementarios: (a) el personal y profesional, (b) el investigador y (c) el curricular. Los cuales detallamos a continuación.

1.1.1. Motivación personal y profesional

Desde hace 14 años, soy profesora de educación media en Chile (imparto docencia a estudiantes entre 13 y 18 años), y en el transcurso de mi quehacer docente en el aula, he tenido que enseñar álgebra. A esas alturas, he observado que a los alumnos no le gustan las matemáticas y tienen prejuicios sobre el álgebra específicamente, los comentarios que han escuchado sobre el tema los desmotiva, incluso antes de iniciarse en su estudio. Como este es un tema fundamental en el estudio de las matemáticas superiores, el trabajo de enseñarlas y aprenderlas, se vuelve más dificultoso.

En algunas visitas esporádicas a las aulas de los más pequeños, pude observar la necesidad de conocimiento que tienen y lo motivados que están por aprender matemáticas. ¿En qué momento muere el amor por ellas? Entonces, me planteo la posibilidad de potenciar esas habilidades de los más pequeños para beneficio a futuro. Si tenemos alumnos que les gusten las matemáticas y que se introduzcan gradualmente en matemáticas y, en particular, en el álgebra desde pequeños, entonces tendremos un mayor número de jóvenes interesados por ellas.

Yo soy chilena y, en 2011 se inició en mi país la discusión sobre las nuevas bases curriculares, las cuales, desde marzo de 2012, incluyen desde el primer año de Educación Básica (primero de educación primaria, 6-7 años), un eje temático de patrones y álgebra. Los profesores de esos niveles, no han sido formados en estas áreas, lo que les genera pesar e incertidumbre en cuanto a las competencias que poseen para desarrollar estos temas. Por ello, como docente en Chile, me parece especialmente interesante profundizar en este contenido.

Con esta idea en mente, encontré una línea de investigación en la que obtuve conocimiento y herramientas conceptuales y metodológicas para desarrollar esta temática al regreso a mi país.

1.1.2. Motivación investigadora

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en Estados Unidos y a la que, por el momento, España no se ha acogido. Desde hace unas décadas se viene investigando en Educación Matemática. La mayoría de los trabajos se han centrado en el paso de la aritmética al álgebra y surge del interés por indagar cómo reaccionan los alumnos antes de la educación secundaria frente a tareas algebraicas, que antiguamente solo eran desarrolladas por alumnos de este nivel educativo. En este trabajo nos centraremos en el enfoque funcional del *early algebra*, que se basa en el estudio de las relaciones entre variables y focaliza su atención en las funciones como contenido matemático.

En España, se han realizado escasas investigaciones sobre pensamiento funcional dentro de esta propuesta (Merino, 2012) y no tenemos información de que se haya llevado a cabo ninguna en los primeros curso de educación primaria. Por ello, nuestro interés por realizar este trabajo en el primer curso de educación primaria. En los antecedentes de nuestro trabajo daremos más detalle sobre las investigaciones llevadas a cabo relacionadas con esta temática, tanto fuera como dentro de nuestras fronteras.

1.1.3. Motivación curricular

Currículos de diferentes países han incluido contenidos relacionados con el álgebra escolar en niveles educativos previos a la educación secundaria. La propuesta curricular *early algebra* surge en estados Unidos pero se ha extendido por diferentes países. Como, el currículo chileno ha incluido, el eje “patrones y álgebra” en sus Bases Curriculares (Ministerio de Educación del Gobierno de Chile, 2012), desde 1° de Educación Básica a 4° año de Enseñanza Media (6 a 18 años). En otros países como Australia, Portugal, Estados Unidos o Corea también se han adherido a la propuesta curricular de *early algebra* (Merino, Cañadas y Molina, 2013). Como referente internacional, destacamos el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), que destaca la necesidad de desarrollar estas competencias, pensamiento algebraico y funcional, desde edades muy tempranas, incluso desde educación infantil.

Nuestro estudio empírico se lleva a cabo en España. En el currículo español vigente al momento de la recogida de la información (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), no hay mención específica a nociones algebraicas en educación primaria. Sin embargo, comparando con los contenidos curriculares de otros países, hay ciertos elementos que se relacionan con el pensamiento algebraico, dentro del que se enmarca el pensamiento funcional y en que se centra nuestra investigación.

1.2. Planteamiento del problema de investigación

Al involucrarnos en la lectura sobre el pensamiento funcional en edades tempranas, nos hemos encontrado con la poca o casi nula investigación que se realiza en España en torno al tema, y a nivel internacional tampoco es mucho lo que encontramos, lo cual avala nuestra investigación como novedosa y necesaria en esta área de investigación. Lo cual esperamos sea un aporte y referente para futuras investigaciones.

Nuestro problema de investigación, parte de la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico y, específicamente, el pensamiento funcional, en edades tempranas. Queremos saber qué relaciones funcionales son capaces de establecer los alumnos de primer curso de primaria y cómo expresan sus conclusiones en la resolución de tareas relacionadas con esas relaciones funcionales.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo abordamos las bases teóricas que sustentan esta investigación. Con base en la búsqueda bibliográfica y en las lecturas realizadas sobre pensamiento funcional, organizamos este capítulo en torno a los siguientes aspectos: *early algebra*, pensamiento funcional, generalización, sistemas de representación y estrategias de resolución. La información que presentamos a continuación permite precisar el significado de los conceptos que utilizamos en esta investigación, enmarcándolos en la literatura existente. También, en paralelo, describimos los principales antecedentes de este trabajo.

2.1. Early algebra

Los estudiantes presentan numerosas y variadas dificultades con el álgebra en educación secundaria (e.g. Rodríguez-Domingo, 2011), nivel educativo en el que se suele introducir el álgebra en diferentes países. Esto justifica el interés por preparar a los estudiantes en niveles educativos inferiores para su formación en álgebra. La propuesta *early algebra* pretende subsanar este problema. Algunos autores (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2014; Kaput, 2008; Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2007) señalan que los tiempos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y que es conveniente iniciarse en el pensamiento algebraico en educación primaria e incluso en educación infantil, aprovechando diferentes contenidos curriculares previos a la educación secundaria.

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en Estados Unidos y que busca incorporar en el aula de educación primaria actividades que fomenten la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar competencias algebraicas en los alumnos. Entre estas competencias algebraicas están explorar, modelizar, hacer predicciones, generalizar, discutir, argumentar, justificar, además de practicar el cálculo. Se pretende desarrollar simultáneamente el pensamiento algebraico y aritmético desde educación primaria, para que se facilite el posterior estudio del álgebra formal en educación secundaria. Esta propuesta está orientada a la instrucción del pensamiento algebraico como a las relaciones algebraicas en niños cuyas edades estén entre los 6 a 12 años (Socas, 2011). Este trabajo es abordable para los estudiantes de educación primaria pues el pensamiento algebraico, en general, se vincula a la

observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, temas que se pueden desarrollar desde educación infantil.

Partiendo de las diferentes concepciones que se distinguen en el álgebra escolar, consideramos las siguientes aproximaciones en el *early algebra*: “El estudio de las relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones” (Molina 2009, p. 136). El *early algebra* no pretende que los alumnos aprendan álgebra formal y su simbolismo desde educación infantil si no que, en algunas situaciones, los profesores introduzcan elementos algebraicos y desarrollen en los alumnos competencias algebraicas que les permitan establecer relaciones y generalizar ciertas propiedades. En general, los enfoques del *early algebra*, concuerdan en que no es necesario agregar más contenidos al programa escolar, sino tratar con mayor profundidad los temas que ya se cubren, subrayando las ideas de generalización, estructura y relaciones.

La mayor parte de las investigaciones que se realizaron antes del año 2009, en el contexto *early algebra* parten de la aritmética y luego acceden al álgebra como parte de la generalización de ciertas propiedades (Warren, 2003). Esto se debe a la gran carga aritmética que tiene el currículo de educación primaria. Los estudios sobre la aritmética como una iniciación al álgebra son prometedores. Sin embargo, hay diversas posturas acerca de cómo llevar a la práctica dicha iniciación. Kaput, Carraher y Blanton (2009) basan su postura en la premisa de que la aritmética y la matemática en la escuela primaria se han abordado de tal manera que restan importancia a la generalización como factor inherente del pensamiento algebraico. En este trabajo nos centramos en un enfoque diferente pero complementario al anterior y que tiene cierto auge en la actualidad: el enfoque funcional.

Usiskin (1999) es uno de los autores que aborda el enfoque funcional del pensamiento algebraico, centrándose en el estudio de las relaciones entre cantidades y en el estudio de las estructuras matemáticas que se crean en torno a esas relaciones.

La autora considera que las letras que se utilizan en una expresión algebraica varían y, con ello, se vuelve necesario establecer relaciones de funcionalidad entre las variables involucradas.

El enfoque funcional propone que el álgebra se empiece a desarrollar y acompañe a los contenidos y tópicos de educación infantil y primaria con conceptos algebraicos que relacionan la variabilidad entre dos conjuntos de datos para que los niños puedan establecer relaciones funcionales de forma intuitiva. En los últimos años hemos identificado diferentes estudios que, a nivel nacional e internacional, abordan el pensamiento funcional.

2.2. Pensamiento funcional

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008). Se trata del proceso cognitivo que se pone de manifiesto al “construir, describir y razonar con y sobre las funciones y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones concernientes a las funciones” (Cañadas, Brizuela y Blanton, en revisión, p. 4).

Los investigadores en *early algebra* tienen una visión amplia sobre el pensamiento funcional: consideran que dicho pensamiento incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos. El pensamiento funcional tiene por objetivo el establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que están inmersos en una situación, la cual es cotidiana para el alumno, demanda el descubrir otras parejas que también estén en esa relación y la generalización de la relación que se establece entre esos conjuntos.

A través del pensamiento funcional, se busca que los niños sean capaces de detectar similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, con los que está trabajando y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia la generalización de la expresión, encontrando una regla que describa la relación funcional entre esas variables. Esta regla puede ser

descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la recursividad, en los procesos podemos obtener la regla general. La generalización es un paso clave y se logra a través de la identificación de la relación general entre los dos conjuntos de datos, que es a lo que se le denomina covariación.

Hay investigaciones que ponen de manifiesto que los niños de educación primaria pueden relacionar, razonar, identificar relaciones entre las variables, generalizar, conceptualizar e incluso expresar notación de variables en sus producciones (Cañadas et al. en revisión; Molina, 2006; Schliemann et al. 2007, Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012; entre otros).

Investigaciones como la de Schliemann et al. (2012) destacan que la introducción del álgebra y, específicamente, del pensamiento funcional tiene repercusiones positivas en los niños de educación primaria. Así lo ponen de manifiesto los alumnos que fueron instruidos en 3°, 4° y 5° de educación primaria y a los cuales, en educación secundaria se les hizo un seguimiento de los resultados académicos que obtenían. Los autores destacan que la introducción del álgebra a través del pensamiento funcional en cursos previos les había ayudado a desenvolverse en el álgebra de educación secundaria.

Blanton y Kaput (2004) llevan a cabo una investigación sobre pensamiento funcional en educación infantil. En la actividad que proponían a los alumnos, establecer la relación que existe entre el número de perros de un grupo, con el número de ojos y el número de colas que se tenían en el grupo. Para lograrlo, realizaron una actividad con niños desde los 3 años, donde manipulaban fotografías de perros y escribían en una tabla las parejas de datos que encontraban, luego lo analizaban. Los niños gradualmente descubren propiedades en la relación, como la paridad, la relación aditiva o multiplicativa entre las variables, también son capaces de introducir notación algebraica en su respuesta.

La importancia que tiene el trabajo con el pensamiento funcional de los alumnos desde los primeros niveles de escolarización y el énfasis que los profesores le dan, queda en evidencia en Blanton y Kaput (2011). Estos autores, trabajan con profesores en ejercicio y analizan las producciones de los niños y cómo el pensamiento funcional y la introducción de variables nacen intuitivamente en edades tempranas. Entre los resultados, destacamos que los alumnos evidencian un pensamiento funcional desde los primeros niveles y esto les puede ser útil en educación secundaria. Aunque los autores

defienden la importancia de los profesores, recuerdan que los cambios se deben realizar desde el currículo.

Brizuela et al. (2014), llegan a introducir la notación de variables en alumnos de 5 a 7 años de edad, con funciones lineales, su intención es ver si los alumnos utilizan letras para expresar la generalización a partir de la introducción de parejas de datos de una tabla. Trabajan con 20 alumnos de 6 años, que cursan 1° de educación primaria y encontraron dificultades similares a las detectadas en alumnos de educación secundaria. Algunos de los errores en los que incurren los alumnos apuntan a la relación entre el orden alfabético de las letras utilizadas y su relación con el orden de los números naturales. Los alumnos de 1° de educación primaria fueron capaces de entender que una letra simbolizaba una variable, o que la pueden utilizar para generalizar una expresión, pero no desechan el uso de valores específicos para cada una de las situaciones planteadas.

Cañadas et al. (en revisión) analizan la relación de covariación que establecen alumnos de 2° de educación primaria al trabajar con situaciones que involucran funciones lineales. Las autoras trabajan en un aula con 21 alumnos, donde piden a los niños relacionar las cantidades en una tabla. Entre los resultados destacan las diferentes estrategias utilizadas para relacionar las dos variables. Por ejemplo, había niños que utilizaban el doble como la suma de sí mismo (donde identifican la relación de covariación presente en la función) y otros que utilizaba la suma de 2 en 2 (con base en la relación de recursividad, lo cual les dificulta para llegar a la generalización). Las autoras destacan el interés de utilizar material manipulativo para introducir a los alumnos en los problemas que se les plantean.

Como hemos observado, las investigaciones citadas, aportan diferentes indicadores de qué observar cuando buscamos describir el pensamiento funcional de un niño durante la realización de una tarea. Por ejemplo, las funciones como contenido matemático, los patrones, la generalización, las estrategias de resolución o los sistemas de representación son algunos de estos elementos, que describiremos en los siguientes apartados de este capítulo. Comenzaremos por la función, como contenido matemático en el que se fundamenta el pensamiento funcional.

2.2.1. Pensamiento funcional en los documentos curriculares

En cuanto a las directrices curriculares, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) propone el estudio del álgebra de forma transversal en todos los niveles educativos, junto con contenidos como número y operaciones, geometría, medida, análisis de datos y probabilidades, dando énfasis a que el bloque de contenidos de álgebra debe ser desarrollado no solo en educación secundaria, si no desde educación infantil. Desde esta perspectiva, el álgebra tiene un enfoque multidimensional, ya que los tópicos que componen el bloque algebraico son variados, como la relación entre cantidades y funciones, comprensión de patrones, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, entre otras.

En el currículo español el estudio del álgebra se inicia en la educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b), abordando temas como, la relación entre variables, la generalización de expresiones, la introducción de letras en la escritura de expresiones numéricas. Por lo que los alumnos se introducen en el álgebra a partir de los 12 años, cuando ya se han trabajado contenidos que podrían haber hecho de puente entre esos contenidos y el álgebra.

En el Real Decreto de Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), en torno a los objetivos transversales, vemos como estos apuntan hacia el sentido crítico que deben tener los alumnos:

... sentido crítico, iniciativa personal, curiosidad, interés y creatividad en el aprendizaje... Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. (p. 31488)

Las competencias en matemáticas que hacen referencia a nuestro estudio en particular y que nos ayuda a la concreción de nuestro objetivo de investigación son:

...Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones... la competencia

matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros)... (p. 31493-31494)

En la definición del área de conocimiento de matemática el currículo hace mención a “... Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria...” (p. 31555). En cuanto al desglose de los contenidos por ciclos, nos encontramos que en el primer ciclo (1º y 2º curso de educación primaria), los alumnos tienen la noción de serie y cómo esta se construye, relacionando los números a través de sumas iteradas, se les pide explícitamente que sean capaces de relacionar y comunicar los resultados que van obteniendo. En el 2º ciclo (3º y 4º de educación primaria), los alumnos tienen por objetivo utilizar los números para codificar información, utilizarlos en situaciones reales, explicando los procesos y resultados en forma oral y escrita. En el 3º ciclo (5º y 6º curso de educación primaria), nos encontramos con, “Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas” (p. 31562).

El currículo de educación infantil (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c) se detallan algunas nociones que abordan tangencialmente el desarrollo del pensamiento funcional en edades tempranas (edades comprendidas entre 3 y 5 años). Como objetivo de este ciclo escolar, queda de manifiesto que las directrices curriculares hacen referencia al desarrollo de las relaciones lógico-matemáticas.

Observamos que, a medida que los cursos van avanzando, se hacen más explícitos los conceptos de relaciones entre las magnitudes, y al análisis de estas relaciones numéricas. En ningún momento del currículo español se hace referencia explícita a la integración del álgebra en educación primaria. Sin embargo, sí existen contenidos en los cuales se pueden incluir situaciones que sean de provecho en la introducción del pensamiento funcional.

2.2.2. Funciones

Una función es una relación entre dos conjuntos de datos, donde hay una dependencia de los valores de uno o más conjuntos de datos respecto de otro(s). En este trabajo nos centraremos en las funciones que relacionan dos conjuntos de datos. Las funciones

cumplen con las condiciones que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. Las funciones se pueden expresar a través de diferentes sistemas de representación, como son el gráfico, tabular, pictórico o simbólico.

Usualmente se representa con x a la variable independiente y por y o $f(x)$ a la variable dependiente, al conjunto de todos los valores que toma la variable independiente es el dominio de la función y el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente es el rango o recorrido de la función (Spivak, 1996).

Hay dos tipos de funciones, las algebraicas y las trascendentales. En las funciones algebraicas nos encontramos con las racionales, polinómicas y radicales (por parte). En las funciones trascendentales tenemos a las funciones exponenciales, logarítmica y trigonométricas (Thomas, 2006). A continuación se presenta un resumen gráfico de los tipos de funciones, adaptado a las necesidades de nuestra investigación.

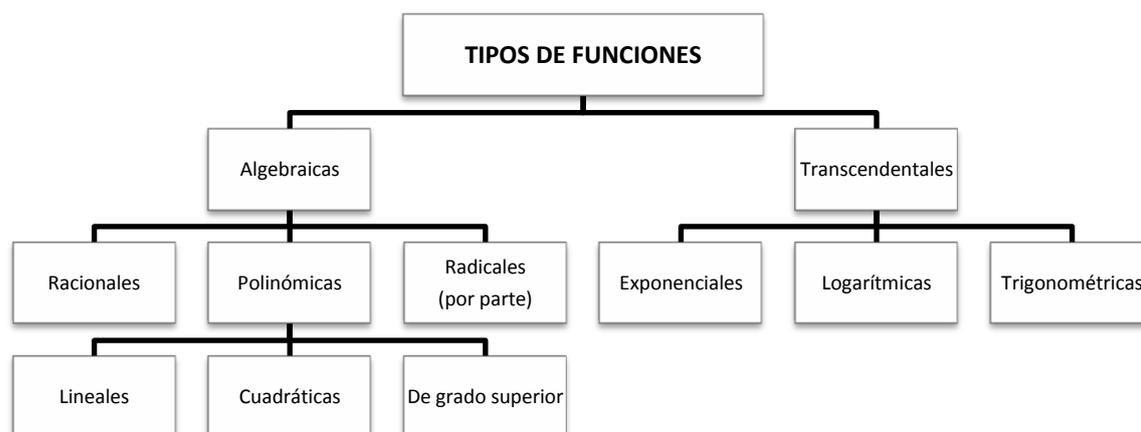


Figura 2.1. Tipos de funciones

En nuestra investigación trabajamos con un tipo concreto de funciones polinómicas: las funciones lineales. Las funciones lineales son de la forma $f(x)=mx+b$, donde m es la pendiente de la recta y b es el punto de corte con el eje Y.

Merino et al. (2013) distinguen dos relaciones que se pueden establecer en las funciones de dos variables, dependiendo de los valores de la variable que se conocen: relación directa y relación inversa.

El autor trabaja con la relación que se puede establecer entre el número de mesas y las personas que se pueden sentar alrededor de ellas, estamos frente a lo que define como relación directa, dado el número de mesas puedo descubrir el número de niños que se pueden sentar a su alrededor, en cambio, cuando el autor le da como dato conocido el número de niños que están sentados y requiere el número de mesas que son necesarias, estamos frente a lo que define como relación inversa entre las variables.

En educación infantil y educación primaria no expresamos las funciones mediante simbolismo algebraico, sino que es habitual utilizar el lenguaje natural. Así, se tiene que para la función identidad ($f(x)=x$), se pueden utilizar expresiones verbales, como “los mismos que...” o “tantos como...”, para indicar la relación entre los dos conjuntos involucrados, haciendo referencia a que ambos poseen la misma cantidad de elementos. Otras funciones lineales que se utilizan comúnmente son el doble o la mitad, $f(x)=2x$ o $f(x)=x/2$. Podemos generalizar a las expresiones a $f(x)=ax$ o $f(x)=x/a$ (con a diferente de 0, cuando a es denominador). También se puede utilizar expresiones verbales como “tengo dos más que tú...” ($f(x)=x+2$) o “tengo dos menos que tú...” ($f(x)=x-2$).

2.2.3. Patrones

La búsqueda de patrones entre los conjuntos numéricos involucrados en las funciones sirven al niño para desarrollar el pensamiento funcional y establecer el término general de la función.

Los patrones son considerados como “algo” que se repite con regularidad (Castro, 1995). Lo común, lo repetido con regularidad y que se prevé que puede volver a repetirse (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Moss y London (2011) trabajan con alumnos de 2° de educación primaria, de diferentes escuelas de Estados Unidos y de Canadá, se les presentan a los alumnos patrones de crecimiento geométricos y numéricos, llegan a la conclusión que la utilización de patrones crecientes ayuda a los alumnos a desarrollar el pensamiento funcional, ya que ellos deben crear sus propios patrones y verificar si son correctos, defendiendo su postura frente a la clase.

Radford (2012) trabaja en una investigación longitudinal con alumnos de 2° a 4° de educación primaria, donde ven la evolución del lenguaje, corporal y simbólico, en la búsqueda de patrones geométricos. Los alumnos en 2° de educación primaria, tienden a

utilizar el conteo de las figuras, sin crear relaciones que vayan más allá de dar una respuesta a la pregunta planteada, sin embargo, con ayuda de la maestra, son guiados en la forma de establecer patrones para la figura dada y generalizar ese patrón. En 3° grado se observa una evolución del lenguaje y de la aplicación de la técnica para encontrar patrones aprendida el año anterior. En 4° grado, los alumnos establecen sin problemas los patrones y son capaces de generar más de una expresión algebraica que determine ese patrón. Concluye el autor, con la reflexión de que podemos incluir actividades algebraicas en lo cotidiano y los alumnos van a reaccionar a ellas de forma positiva.

2.2.4. Generalización

Según Piaget (1978), la generalización es un proceso de abstracción empírica y solo basta con el paso de algunos a todos, ya que es de carácter extensional, también nos propone que la generalización es fundamental en la construcción de conocimiento, que está sometida a la abstracción y que tiene como tarea fundamental el encontrar relaciones reales entre los objetos en estudio.

Kaput (1999) define generalizar como:

... extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 58).

En Cañadas y Castro (2007) se describe la generalización como una expresión que abarca a todos los casos posibles, que se construye a través de la inducción comenzando con casos particulares. La generalización es un paso clave dentro del proceso de razonamiento inductivo, que parte de casos particulares y busca expresar el término general.

En el estudio de Lannin (2005) podemos ver los tipos de generalización que los alumnos utilizan en las tareas asignadas, se destacan el de la generalización empírica y el de generalizar a través de un ejemplo genérico. Al principio de la investigación, que se realiza con alumnos de 6° grado, los alumnos no dan importancia a la justificación de la generalización. Al tratarse de una investigación de diseño, a medida que van

interactuando en la instrucción sobre la generalización y que el investigador los va formando, los alumnos enriquecen su vocabulario y formalizan la generalización a través de la justificación de sus decisiones.

Merino et al. (2013) trabajan el pensamiento funcional con alumnos de 5° de educación primaria en la realización de tareas de generalización. A través de un ejemplo genérico, los alumnos establecen relaciones funcionales entre las variables. Concluyen que los tipos de representaciones que los alumnos utilizan son variados, que logran generalizar y que evidencian en sus producciones utilización de pensamiento funcional.

Butto y Rojano (2009) desarrollan su investigación con 12 alumnos de 5° de primaria. Las autoras introducen el concepto de variación proporcional y generalización con la ayuda de lápiz y papel y el programa Logo. Concluyen que los alumnos pueden trabajar conceptos algebraicos en edades anteriores a la formalización, en diferentes tipos de tareas y con diversos materiales de apoyo como lo son la utilización de lápiz y papel o el manejo del programa computacional Logo.

2.2.5. Estrategias de resolución de tareas que involucran relaciones funcionales

Las estrategias son las diferentes formas o caminos que el alumno utiliza para resolver el problema, específicamente, en nuestra investigación nos basamos en la relación funcional que los alumnos establecen entre las variables involucradas, las cuales los conducen a la posterior generalización. Establecer una estrategia válida o adecuada, llevará a dar una respuesta correcta.

Cañadas (2007) plantea la secuenciación de siete pasos que podemos utilizar como estrategia en resolución de problemas en los que se busca llegar a la generalización: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de los casos particulares, (c) identificación de patrones, (d) formulación de conjeturas, (e) justificación, (f) generalización y (g) demostración. Los pasos previos a la generalización se consideran importantes pero no imprescindibles para lograr la generalización.

Las estrategias que los alumnos identifican en una relación funcional, dependen de cuál sea la relación que adopte el alumno. Podemos observar una relación funcional, tratando de buscar cual es la relación entre dos magnitudes, observar la progresión de cada una de las variables involucradas en el problema, la diferencia entre dos pares de datos

consecutivos, establecer cuanto más (o menos) es una magnitud respecto a la otra, entre otras relaciones que podrían establecer.

Merino et al. (2013) trabajan con alumnos de 5° de educación primaria, se les pide que encuentren un patrón para dar respuesta a las cuestiones de relación directa de las mesas (ver figura 2.2), donde deben sentar a dos niños en los costados de las mesas y a dos en las cabeceras, según vayan colocando más mesas, llegando a establecer un patrón entre el número de mesas y el número de niños. Observamos que los alumnos utilizan una diversidad de estrategias, algunas erróneas y otras correctas, $M \times 2 + 2$, $M + M + 2$, $M + M + 1 + 1$, $M + 8$, $M \times 4$ (donde M representa el número de mesas utilizadas), respuesta directa y conteo de dibujos. Todas estas fueron estrategias que los alumnos utilizaron para resolver el problema.

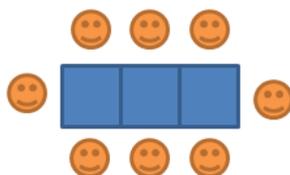


Figura 2.2. Ejemplo generador (Merino et al. 2013)

Las estrategias que establecen estos autores en el proceso de generalización, son:

Conteo (los alumnos cuentan elementos para dar respuesta a la cuestión), uso de patrón (los alumnos identifican algún patrón, que puede ser completo/incompleto y apropiado/inapropiado, para una cuestión concreta), operación sin uso de patrón (los alumnos utilizan alguna operación que no podemos relacionar con un patrón para la cuestión), y repetición de enunciado (los alumnos repiten las instrucciones dadas en el enunciado general de la prueba) (p. 29).

En Cañadas et al. (en revisión) trabajan el uso de diferentes estrategias para llegar a la generalización, identificamos el uso de la covariación entre las variables, también los alumnos identifican el doble de la variable o la serie de 2 en 2, los alumnos logran establecer estas estrategias por la utilización de material manipulativo.

2.3. Sistemas de representación

En este apartado definimos los sistemas de representación, presentando algunos ejemplos. Finalmente nos centramos en aquellos sistemas de representación que son relevantes por el contenido matemático en el que se centra nuestra investigación: las funciones.

En la literatura encontramos diferentes definiciones de representaciones y de sistemas de representación (e.g., Brizuela, Carraher y Schliemann, 2000; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Cañadas y Figueiras, 2011; Gómez, 2007; Rico, 2009), aunque todos coinciden en que una representación nos sirve para expresar contenidos matemáticos y que diferentes representaciones destacan ciertas características de cada contenido. En el caso de los sistemas de representación, existen unos signos o símbolos propios de cada sistema y existen unas reglas para crear, transformar y relacionar esos signos.

Gómez (2007) define los sistemas de representación como “los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto” (p. 41) y que cada sistema de representación permite resaltar ciertos significados de ese concepto.

El pensamiento funcional involucra a las funciones que, como contenido matemático, conlleva una serie de sistemas de representación asociados. Cada uno de esos sistemas de representación pone de manifiesto unos u otros significados de este contenido. El sistema de representación simbólico es muy importante para las funciones, incluyendo tanto los números como las letras. Sin embargo, no es uno de los sistemas de representación clave para los niños de educación primaria porque no están familiarizados con él. El uso del lenguaje natural (sistema de representación verbal) es especialmente útil para los alumnos de los primeros cursos porque les resulta cercano (Cañadas et al. en revisión; Radford, 2011). Los investigadores en *early algebra* tienen una visión sobre los sistemas de representación asociados al pensamiento funcional y consideran que incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se pueden incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos.

2.3.1. Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal permite utilizar el lenguaje natural para exponer los resultados que van obteniendo, de forma cohesionada y estructurada y permiten expresar el proceso de razonamiento (Cañadas y Figueiras, 2011).

En la figura 2.3 recogemos un ejemplo de situación expresada verbalmente.

Cantidad de bandejas de media docena necesarias
para tener una cierta cantidad de huevos

Figura 2.3. Ejemplo de los huevos.

La relación funcional que está inmersa en la situación de la figura 2.3, expresada mediante simbolismo algebraico, es $f(x) = 6x$, siendo x el número de bandejas y $f(x)$ el número de huevos.

El sistema de representación verbal puede ser útil en el enunciado de situaciones como en la resolución de las mismas. En la figura 2.4 mostramos ejemplos de la solución dadas por diferentes sujetos ficticios para la relación mostrada en la figura 2.3 en el sistema de representación verbal.

Juan: En la primera bandeja hay 6 huevos y en la segunda bandeja también hay 6 huevos y así seguimos hasta llegar a la última bandeja.

María: Con cada bandeja de huevos agregamos 6 huevos a los que ya teníamos.

Antonia: Los huevos son 6 veces la cantidad de bandejas que tengamos.

Figura 2.4. Ejemplos de sistema de representación verbal

Brizuela y sus colaboradores (Brizuela et al. 2000; Brizuela et al. 2014; Brizuela y Lara-Roth, 2002), trabajan con entrevistas donde los alumnos se expresan verbalmente sobre la relación que establecen entre las variables, la cual se encauza para que los niños cambien de sistema de representación al simbolismo algebraico o tabular, según sea el fin que persiga la investigación.

Cañadas et al. (en revisión) proponen utilizar un lenguaje natural con el cual los niños estén familiarizados y plantearles todas las formas de representación, inclusive la notación algebraica una vez han identificado el patrón, así el desarrollo del pensamiento

funcional se ve enriquecido. Inician su investigación empírica con la premisa que los niños tienen más recursos para razonar de lo que se pensaba hace algunos años. Concluyen que en este ámbito del conocimiento la investigación es muy reciente y que se están haciendo esfuerzos por desentrañar la forma de utilizar el pensamiento funcional de los niños.

2.3.2. Sistema de representación simbólico

Como lo expone Rico (2009, p. 8), el sistema de representación simbólico es de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas computacionales y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas y procedimientos. Para las funciones, se suele distinguir entre el numérico y el simbolismo algebraico.

Los niños de educación primaria no están familiarizados con el simbolismo algebraico, por lo que este sistema de representación se suele restringir a expresiones que involucran números.

En la figura 2.5 ponemos de ejemplo lo que se puede encontrar en el sistema de representación simbólico, en el problema de los huevos anteriormente mencionado (figura 2.3).

6+6+6+6 o 6 y 6 y 6 y 6	$n^{\circ}H = 6 \times n^{\circ}B$ donde, H=huevos B=bandejas	$f(x)=6x$	1 2 3 4 5 (6) 7 8 9 10 11 (12) 13 14 15 16 17 (18) ...
-------------------------------	---	-----------	---

Figura 2.5. Ejemplos de sistema de representación simbólico

En la investigación que lleva a cabo Brizuela et al. (2014), el objetivo es la introducción del simbolismo algebraico a través de la inclusión de letras, las cuales actúan como variables. En sus conclusiones resaltan que los alumnos pueden adquirir un lenguaje de letras como variables y evidencian el pensamiento funcional en la introducción de éstas variables en las tareas propuestas a los alumnos.

2.3.3. Sistema de representación pictórico

El sistema de representación pictórico es aquel en el que intervienen dibujos.

Los dibujos ayudan al alumno a organizar la información que está generando, en la cual está pensando y busca dar solución al problema que le plantearon. Los dibujos también

pueden recoger información presente del enunciado y sobre él puede el alumno hacer anotaciones que le permiten resolver el problema.

En la figura 2.6 recogemos tres dibujos que representan la situación de la figura 2.3 para tres bandejas de media docena.

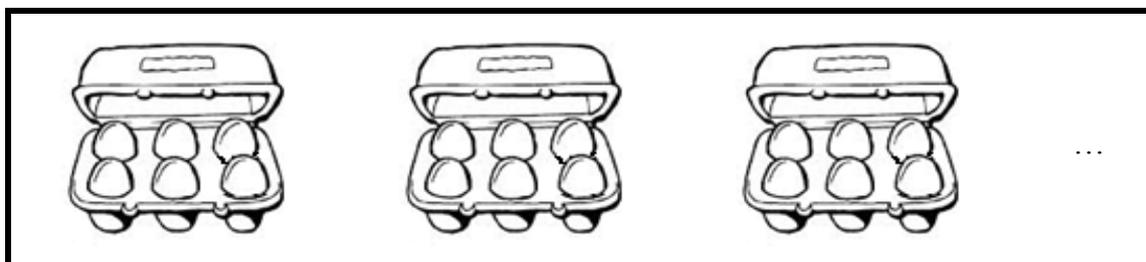


Figura 2.6. Ejemplo de sistema de representación pictórico

Brizuela et al. (2000) hace una investigación con alumnos de 3° de educación primaria en la que les plantean situaciones problemáticas que deben resolver. El sistema de representación, que los alumnos utilizan con mayor frecuencia es el pictórico. Los alumnos representan la información entregada por el profesor en este sistema de representación. La autora identifica cómo los estudiantes ponen de manifiesto la relación entre las variables implicadas en las tareas verbal y pictóricamente. A medida que la instrucción avanza, como parte del estudio, los alumnos utilizan cada vez menos el sistema de representación pictórico, dando paso al sistema de representación simbólico.

2.3.4. Sistema de representación tabular

El sistema de representación tabular se basa en el uso de tablas que relacionan valores. En el caso de las funciones con dos variables, las tablas permiten organizar la información, relacionando los valores de las dos variables involucradas. Para que los alumnos establezcan relaciones entre los valores de las columnas o filas de las tablas que deben ir construyendo.

Siguiendo con el ejemplo de la figura 2.3, en la figura 2.7 mostramos un ejemplo en el sistema de representación tabular.

N° de bandejas	N° de huevos
1	6

Nº de bandejas	Nº de huevos
2	12
3	18
4	24
...	...

Figura 2.7. Ejemplo de sistema de representación tabular

Brizuela y Lara-Roth (2002) estudian los distintos modos de utilización de las tablas por los alumnos en la resolución de tareas, los autores ponen de manifiesto lo útiles que son las tablas para ayudar a los alumnos a avanzar en el establecimiento de las relaciones funcionales. La creación de tablas y el análisis por parte de los alumnos de los datos que estas organizan, hacen que ellos identifiquen las relaciones existentes entre las variables con mayor facilidad que cuando los datos se encuentran de manera desordenada.

CAPÍTULO 3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, con base en los elementos introducidos en el capítulo anterior, presentamos el objetivo general de la investigación y lo desglosamos en tres objetivos específicos.

3.1. Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es “Describir el pensamiento funcional de alumnos¹ de primero de educación primaria en España”.

3.2. Objetivos específicos

Para abordar el objetivo general propuesto, lo desglosamos en los siguientes objetivos específicos.

OE1 Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos en tareas que involucran una relación funcional lineal directa entre dos variables, prestando especial atención a los diferentes tipos de patrones que utilizan.

OE2 Identificar y describir estrategias utilizadas por alumnos en tareas que involucran una relación funcional inversa, una función lineal con término independiente y una relación funcional lineal entre varias variables.

OE3 Describir los sistemas de representación que los alumnos utilizan en la resolución de las tareas sobre las funciones propuestas.

Con base en los objetivos de investigación propuestos, diseñamos este estudio.

¹ En este trabajo utilizaremos la palabra “alumnos” para hacer referencia tanto al masculino como al femenino de este término.

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo describimos los aspectos metodológicos de este estudio. Para ello, describimos el tipo de investigación, caracterizamos los sujetos que participan, describimos el diseño de los instrumentos para la recogida de datos, el procedimiento de esta recogida, y las categorías definidas para el análisis de datos.

4.1. Tipo de investigación

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Exploratorio, porque las investigaciones que hay en torno a este tema son recientes y escasas. El estudio es descriptivo porque el análisis de los datos pretende describir los procesos de los alumnos en torno a su pensamiento funcional.

Se trata de un estudio de campo exploratorio, pues no hay información sobre el pensamiento funcional de los alumnos de primero de educación primaria en España. Pretendemos recopilar información que sea la base para posteriores investigaciones, con la intención de sentar la base para una posterior Tesis Doctoral sobre el desarrollo del pensamiento funcional en las primeras edades.

Nuestro trabajo es una investigación transversal ya que está situada en un momento específico de la vida de estos estudiantes. Recogemos información de un grupo de estudiantes de primero de educación primaria, elegido intencionalmente, a los que aplicamos una prueba escrita. De ellos, elegimos a cuatro estudiantes, a los que realizamos una entrevista semiestructurada. Tanto la prueba escrita como el guión de la entrevista fueron elaborados por las investigadoras.

4.2. Sujetos

Con base en nuestros objetivos, seleccionamos una muestra intencional compuesta por 32 niños, que cursan primero de primaria en el período académico 2013-2014, en el Colegio San José, Granada. Los niños tenían edades comprendidas entre los 6 y 7 años en el momento de la recogida de la información. El colegio incluye educación infantil, primaria y secundaria, es un centro concertado y tiene dos grupos por cada curso.

En cuanto a los conocimientos previos de los alumnos, ellos no habían trabajado con los sistemas de representación, patrones numéricos o algebraicos y no se les ha instruido sobre los procesos de generalización. Esto no es de extrañar porque, estos tópicos no están incluidos en el currículo actual del primer curso de educación primaria. Sin embargo, sí habían trabajado en educación infantil la identificación de patrones geométricos y las maestras manifestaron que habían trabajado las series de 1 en 1 y de 2 en 2, como actividades de conteo en matemáticas, pero no estaban asociadas a ningún contexto específico.

Algunos alumnos presentan características específicas: un alumno con hiperactividad y dos alumnos no lectores. Los tres reciben apoyo continuo de la psicopedagoga. También nos encontramos con que la mitad del grupo está iniciándose en la escritura.

Tuvimos en cuenta las características de los sujetos para el diseño de la investigación.

4.3. Diseño de la recogida de la información

Inicialmente, teníamos previsto proponer una prueba escrita con una serie de tareas en las que los sujetos pudieran poner de manifiesto su pensamiento funcional. Además, teníamos en mente la realización de entrevistas. Dadas las dificultades con la lectura que presentan algunos de los sujetos, decidimos hacer una presentación inicial ante toda la clase, donde planteamos las tareas de forma oral. Además, decidimos introducir las actividades a través de recursos manipulativos para facilitar su comprensión (a ellos no les entregamos el material concreto en la prueba escrita, pero sí en las entrevistas). Elaboramos material igual al que tenían impreso pero de forma que pudiéramos manipularlo y, simultáneamente, les sirviera para entender en qué consistía la prueba escrita. A continuación, hubo un tiempo destinado al trabajo individual en el que los alumnos debían responder a una serie de tareas de forma escrita e individualmente. Durante esta parte del trabajo podían preguntar dudas sobre los planteamientos a las investigadoras. Esto también sirvió para, tener una primera aproximación del tipo de respuesta que daban los alumnos a las tareas propuestas porque continuamente nos paseábamos por el aula.

Al aula entramos la investigadora (autora de este TFM) y la tutora del trabajo. Fue labor de la autora del TFM presentar la prueba escrita a la clase, explicarles cómo completar

las diferentes tareas propuestas (les entregamos tareas individuales por escrito para que las cumplimentaran y las explicaran), utilizando materiales manipulativos. Registramos lo acaecido mediante cámaras de video y audio. Durante el tiempo de trabajo individual, tanto la autora como la tutora, hicimos un seguimiento de la resolución de las tareas y resolvimos dudas. La tutora tomó algunas notas escritas e hizo fotografías.

Con base en la información recogida del trabajo individual, seleccionamos a algunos sujetos para la realización de entrevistas semiestructuradas. Los criterios que utilizamos para la selección son la utilización de patrones únicos, o bien la representatividad que tenga la estrategia en el grupo. El fin de las entrevistas es complementar la información recogida a través de las pruebas escritas y profundizar en el pensamiento funcional que evidenciaban estos alumnos. Para ello, preguntamos sobre la prueba escrita e incluimos algunas cuestiones adicionales que presentaremos más adelante. Dado que en las entrevistas introdujimos materiales manipulativos, también analizamos si esto les ayudó en la resolución de la tarea. Los estudiantes que fueron seleccionados para la realización de las entrevistas fueron aquellos que en la prueba escrita evidenciaron una estrategia de representación de la solución innovadora o diferente a la de sus compañeros, o que habían incurrido en errores en la solución y necesitábamos que verbalizaran la explicación (escasa o nula) que dieron por escrito. Finalmente seleccionamos a 4 alumnos para realizar las entrevistas.

4.4. Instrumentos de recogida de información

Utilizamos dos instrumentos de recogida de información, que describimos en este apartado: (a) prueba escrita y (b) entrevista semiestructurada.

4.4.1. Diseño de la prueba escrita

El diseño de la prueba escrita parte del interés por elaborar tareas que evidenciaran en los alumnos la presencia de pensamiento funcional. Diseñamos una tarea en un contexto cercano y ameno para los sujetos (un cumpleaños), que involucraran diferentes variables, con relaciones funcionales que pudieran ser abordados por los sujetos en 1,5 horas de trabajo máximo, para evitar el cansancio.

Las variables de tarea que consideramos fueron: (a) número de variables involucradas, (b) tipo de relación entre las variables, (c) tipo de relación funcional, (d) tamaño de los

números implicados, (e) sistemas de representación empleados en el enunciado, (f) sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta, (g) preguntas sobre casos particulares consecutivos y no consecutivos.

Número de variables involucradas

En cada tarea se trabaja con la relación entre dos variables, la variable independiente para todas las relaciones es la misma. En la entrevista hay una tarea que incluye las 4 variables involucradas en la investigación, a la cuál denotamos por varias variables.

Tipo de relación entre las variables

Las relaciones que fueron estudio de esta investigación son la relación directa, si al alumno se le entrega como dato conocido el valor de la variable independiente y se le pide que encuentre el valor de la variable dependiente, estamos frente a una relación inversa cuando el grado de dependencia se invierte y hacemos referencia a la relación de varias variables cuando son más de dos las variables involucradas.

Tipo de relación funcional

Las relaciones funcionales que están inmersas son polinómicas lineales de la forma $f(x)=mx + b$.

Tamaño de los números implicados

Los números utilizados como variable independiente fueron 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100. Los primeros cinco casos se tomaron de forma consecutiva para que los alumnos percibieran la relación entre las variables, luego se les entregan casos particulares lejanos y no consecutivos, el octavo, décimo y vigésimo término, para obligar al niño a abstraer la relación numérica, y por ultimo una generalización de un caso particular lejano, al hacerles una pregunta abierta sobre el valor 100.

Sistemas de representación empleados en el enunciado

Los sistemas de representación que fueron utilizados en los enunciados de las tareas son pictórico, simbólico, verbal y tabular.

Sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta

Como se definió en el apartado anterior se les hizo mención a los alumnos en forma oral que ellos podían utilizar la forma de explicación que quisiesen, haciéndoles explícito que podían escribir un número u operaciones (simbólico), hacer un dibujo (pictórico), o escribir con palabras (verbal) lo que pensaban.

Preguntas sobre diferentes casos particulares y generalización

Para esta investigación, utilizamos la continuación para los primeros cinco términos de la relación (consecutivos) y la extrapolación para los casos particulares 8, 10, 20 y 100 (no consecutivos); pudiéndose considerar 20 y 100 como generalización, por no ser casos particulares consecutivos ni cercanos para el ámbito numérico de los alumnos.

Tras varias revisiones en las que tuvimos en cuenta otras cuestiones como que el contexto fuera cercano y llamativo para los niños de la muestra según la revisión de antecedentes y que los alumnos en su mayoría estaban aprendiendo a escribir, nos llevó a confeccionar un instrumento que recogiera la información que necesitábamos para lograr los objetivos. Llegamos a lo que consideramos la primera versión de prueba, que utilizamos en el estudio piloto 1 (ver Anexo A).

4.4.1.1. Estudio piloto 1

Aplicamos la primera versión de la prueba a una niña de 4 años de edad, elegida intencionalmente, con resultados académicos superiores a la media de alumnos de esa edad, en forma de entrevista semiestructurada. Le explicamos lo que debía ir haciendo en cada una de las tareas y le fuimos preguntando que hacía y cómo se lo podría explicar a otra persona.

La entrevista tuvo una duración 1 hora y 10 minutos y nos permitió obtener las siguientes conclusiones. Por un lado, la alumna entendió lo que se le pedía y las respuestas pusieron de manifiesto relaciones entre las variables implicadas en la tarea

(ejemplo de pensamiento funcional), utilizando frases como “a cada niño le toca un gorro, entonces 5 gorros, 5 niños”. En esta ocasión, la alumna explicitó la generalización directa verbalmente. También trabajamos con ella la relación inversa, la cual tampoco le conllevó mayor dificultad y la relación funcional entre varias variables que resolvió sin dificultad.

Después de llevar a cabo el primer estudio piloto, analizamos las dificultades y fortalezas. Tras este análisis, decidimos incluir una tercera relación funcional (relación $f(x)=5x$), una tarea con un valor independiente (relación $f(x)=x+1$), incluir únicamente la relación directa en la prueba escrita y dejar la relación inversa y varias variables en la entrevista, esto debido al tiempo que conlleva la introducción de una tercera y cuarta tarea, estamos duplicando el número de tareas y aumentando la complejidad de las mismas, además hay que considerar el tiempo que demanda el trabajo con el gran grupo. Tras estas decisiones, produjimos una segunda versión de la prueba (ver Anexo B), Utilizamos esta versión en el estudio piloto 2.

4.4.1.2. Estudio piloto 2

Realizamos el segundo estudio piloto a un niño de 6 años de edad que cursa primero de primaria en un colegio público de la ciudad de Granada. El niño es no lector y es elegido de manera intencionada. La tarea se le aplicó en forma de prueba escrita, sin mayor instrucción de lo que debía hacer. Este niño dedicó mucho tiempo a dibujar en forma correcta los dibujos que representan los elementos de las relaciones, dedicándole demasiado tiempo a los detalles de los dibujos. Logró identificar la primera relación funcional (relación $f(x)=x$) de forma correcta, pero se agota al ver el número de folios que se le entregó. En la segunda relación (relación $f(x)=3x$) repartió a cada niño un elemento, sin tomar en cuenta la relación de la unidad uno a tres entregada como primera pareja de datos y procedió de la misma manera con las siguientes relaciones ($f(x)=5x$ y $f(x)=x+1$), tratando de terminar rápidamente.

Después de analizar los datos obtenidos en el estudio piloto 2, tomamos algunas decisiones para la versión definitiva de la prueba.

- Los dibujos no deben tener muchos detalles, para que no actúen como distractores.

- Es importante explicar a los niños en la pizarra como introducir datos relativos a los primeros casos particulares en una tabla.
- Es mejor entregarles la prueba separando las tareas (no todos los folios simultáneamente).
- En la entrevista trabajaremos con la relación inversa, relación entre varias variables y con la inclusión de un término independiente en la relación.

4.4.1.3. Prueba escrita definitiva

Tras la realización de los dos estudios pilotos y sucesivas modificaciones tras los resultados obtenidos en los mismos, diseñamos la prueba definitiva, que la presentamos en el Anexo C.

Para esta investigación le planteamos a los alumnos tres relaciones funcionales lineales distintas, que tenían que ver con objetos presentes en una fiesta de cumpleaños, en los cuales debían rellenar los casilleros vacíos de una tabla, según el ámbito numérico en el cual se manejan los alumnos.

Tarea 1

Relación entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 1, la función identidad es la que determina la relación entre las variables, o bien, $f(x)=x$, donde el valor de la variable independiente es siempre igual al valor de la variable dependiente. Se les da explícita la relación 1 niño-1gorro y se les pregunta por los siguientes casos particulares, 2, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de gorros de haber 100 invitados a la fiesta.

Tarea 2

Relación entre número de niños y número de piruletas que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 2, la función que determina esta relación es $f(x)=3x$, donde el valor de la variable independiente es siempre un tercio del valor de la variable dependiente, o bien el valor de la variable dependiente es el triple del valor de la variable independiente. Se les da escrita en el folio la relación 1 niño-3 piruletas y ante el gran grupo se hace explícita la relación 2 niños-6 piruletas, se les pregunta por los

siguientes casos particulares, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de piruletas de haber 100 invitados a la fiesta.

Tarea 3

Relación entre número de niños y número de globos que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños. Para la tarea 3, la función que determina esta relación es $f(x)=5x$, donde el valor de la variable independiente es la quinta parte del valor de la variable dependiente, o bien el valor de la variable dependiente es el quíntuple del valor de la variable independiente. Se les da escrita en el folio la relación 1 niño-5 globos y ante el gran grupo se hace explícita la relación 2 niños-10 globos, se les pregunta por los siguientes apartados, 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la mamá la compra de globos de haber 100 invitados a la fiesta.

4.4.2. Entrevistas semiestructuradas

La entrevista (Anexo D) consta de dos partes. En la primera se pretende complementar la información del trabajo del alumno en la prueba escrita. Para ello, con sus producciones escritas delante, se le hacen preguntas como por ejemplo, ¿Qué hiciste? ¿Cómo lo pensaste? ¿Cómo se lo explicaríamos a la mamá de Lola? ¿Podríamos saber la solución para 100 niños? En la segunda parte de la entrevista, utilizamos una tarea escrita que involucra la relación inversa de las variables trabajadas en la prueba escrita inicial, la inclusión de un término independiente en la relación ($f(x)=x+1$) y la relación entre varias variables dado solo uno de los términos de esta relación.

A continuación detallaremos las tareas utilizadas en la entrevista, las variables son las mismas que se utilizaron en la prueba escrita.

Tarea 1 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 3 niños-3 gorros y se les pregunta por el número de niños dados 7 y 12 gorros. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 2 entrevista

Relación entre número de niños y número de gorros que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, si a la cumpleañera se le debe comprar un gorro diferente al de los invitados, se les da escrita en el folio la relación 2 invitados-3 gorros y se les pregunta por el número de gorros dados 4, 9 y 12 invitados. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 3 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de piruletas que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 1 niño-3 piruletas y se les pregunta por el número de piruletas dados 6 y 15 gorros. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 4 entrevista

Relación inversa entre número de niños y número de globos que deben comprarse para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio la relación 1 niño-5 globos y se les pregunta por el número de niños dados 10 y 25 globos. Oralmente les preguntamos cómo se podía obtener esa información.

Tarea 5 entrevista

Relación entre varias variables, número de niños, número de gorros, número de piruletas y número de globos que deben ser comprados para la fiesta de cumpleaños, se les da escrita en el folio el dato que se tienen 9 piruletas y se les pregunta por el número de niños, número de gorros y número de globos que son necesarios para esas 9 piruletas, se les pregunta como lo descubrieron.

4.5. Recogida de la información

Para que la presencia de las investigadoras no creara un sesgo de la información que queríamos recibir de los alumnos, al ser tan pequeños, la autora de este TFM y su tutora, asistimos al aula durante el mes anterior a la recogida de la información. Esta intervención consistió en ayudar en diversas tareas, atendiendo a los alumnos que necesitaban algún apoyo o tenían dudas sobre las tareas que la maestra les requería. Este

apoyo no tenía relación con matemática. Con esta actuación, los alumnos se sintieron cómodos en el momento de la recogida de datos y en las entrevistas personales. La maestra habitual de los niños estuvo presente pero no intervino (ver figura 4.1).



Figura 4.1. Imagen de la aplicación de la prueba escrita

En la recogida de información a través de la prueba escrita, los sujetos trabajaron individualmente tras las explicaciones generales sobre la tarea dadas por la autora de este TFM al gran grupo. Tanto investigadora como tutora estuvieron presentes para aclarar dudas puntuales que pudieran surgir y tomaron notas de aquellas cuestiones que pudieran resultar relevantes para los objetivos de investigación o para la realización de las entrevistas semiestructuradas. Los alumnos realizaron la prueba escrita en una sesión de trabajo de 1 hora y 40 minutos el día 2 de abril del presente año, en el aula habitual de los alumnos participantes. Asistieron un total de 32 alumnos. Quedó registro de la sesión en audio y video. Además, hicimos fotografías de diferentes momentos significativos. Las producciones escritas de los alumnos se encuentran en el Anexo E.

La recogida de datos se llevó a cabo como lo teníamos previsto. Los niños se portaron correctamente y tuvieron excelente disposición.

Realizamos las entrevistas en los dos días siguientes a la recogida de datos; en la biblioteca del colegio el primer día y en un salón pequeño el segundo día. Los dos

lugares son acogedores y tranquilos, con la única presencia, del niño y la autora de este TFM, que fue la encargada de realizar las entrevistas. Además, se le proporcionó material concreto: tarjetas con dibujos de niños, gorros, coronas de princesas, globos y piruletas, en cantidad suficiente para que los utilizaran si lo encontraban necesario (ver figura 4.2).



Figura 4.2. Aplicación de la entrevista

Las entrevistas fueron grabadas en audio en su totalidad y se tomaron algunas fotos de lo que los alumnos hicieron con el material manipulativo. Las transcripciones de las entrevistas se encuentran en el Anexo F.

En el Anexo G, encontramos fotografías de los materiales manipulativos utilizados en la entrevista y en la explicación al gran grupo.

4.6. Categorías para el análisis de datos

Partimos de las categorías utilizadas por Merino et al. (2013), y que hemos descrito en el marco teórico. Adaptamos estas categorías para que aporten al desarrollo del objetivo de esta investigación con base en la información recogida y según la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Finalmente, utilizamos las siguientes categorías: (a) responden, (b) corrección, (c) sistemas de representación y

(d) estrategias. A partir de estas categorías, definimos una serie de sub-categorías para desglosar la información. A continuación, describiremos las categorías y sub-categorías identificadas y el significado que atribuimos a cada una de ellas.

4.6.1. Responden

Con la categoría respuesta identificamos si los alumnos contestan o no a cada uno de los apartados de las tareas propuestas. Se trata de una categoría dicotómica que puede tomar los valores sí o no.

4.6.2. Corrección

La categoría corrección indica si los alumnos dieron una respuesta correcta. Se trata de una categoría dicotómica que puede tomar los valores sí o no.

4.6.3. Sistemas de representación

Con la categoría de sistemas de representación, recogemos los sistemas de representación que emplea cada alumno en la resolución de cada apartado de la tarea. Los sistemas de representación no son excluyentes, puesto que un alumno puede utilizar más de un sistema de representación en su respuesta. Los sistemas de representación que hemos considerado en nuestra investigación son: pictórico, simbólico y verbal.

4.6.4. Estrategias

La categoría sobre estrategias recoge el procedimiento que utilizó cada alumno para dar respuesta a cada uno de los apartados de cada tarea. Estas categorías son excluyentes e independientes de si la respuesta es correcta o no.

Conteo de dibujos

Consideramos que un alumno realiza un conteo de dibujos, cuando realiza un dibujo el cuál puede ir acompañado del respectivo valor numérico.

Respuesta directa

El alumno da una respuesta directa cuando responde únicamente con un número en el casillero asignado a la respuesta.

Asociación de elementos en grupos

En esta categoría están las respuestas en las que hay dibujos o números de los elementos, pero que de alguna manera hicieron grupos con estos elementos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que los alumnos cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están considerados los alumnos que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo analizamos la información obtenida por medio de los dos instrumentos descritos en el capítulo anterior: la prueba escrita y la entrevista. Esta información la podemos analizar desde diferentes puntos de vista: (a) un análisis individual por cada uno de los apartados que componen cada tarea, (b) un análisis individual de cada una de las tareas, (c) un estudio individualizado por cada uno de los alumnos que formaron parte de la muestra a través de sus producciones escritas o entrevistas o (d) un análisis de los resultados comparando las actuaciones en conjunto de todas las tareas y apartados. Nos centraremos, por extensión y tiempo, en el análisis por tarea y apartado ((a) y (b)), considerándose los otros análisis como líneas de continuación abiertas sobre el tema de esta investigación.

El capítulo consta de dos apartados, que se corresponden con los dos instrumentos de recogida de información utilizados. Mientras que en el primer apartado hacemos referencia únicamente a las pruebas escritas, en el segundo, combinamos información procedente de ambos instrumentos, pues la entrevista se realizó para complementar la información obtenida a través de la prueba escrita en primera instancia.

Para mantener el anonimato de los alumnos, hemos asignado al azar un número del 1 al 32 para cada uno de ellos.

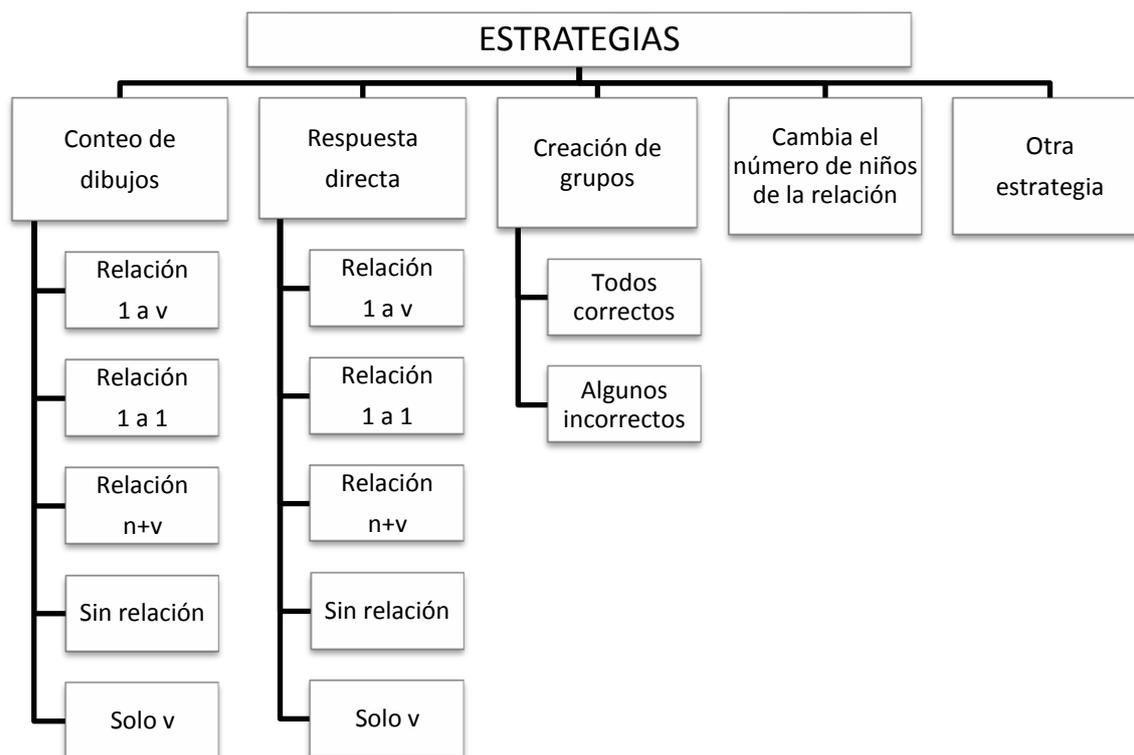
5.1. Producciones de los alumnos en la prueba escrita

En este apartado presentamos los resultados provenientes de las producciones de los alumnos en la prueba escrita. Describimos el trabajo que realizaron los alumnos en cada tarea y en cada uno de los apartados que la constituyen, organizando los resultados según las categorías descritas en el capítulo 4 (respuesta y corrección de la respuesta, sistemas de representación y estrategias). Nos centramos en hallazgos comunes para la mayoría de los alumnos, en casos particulares que destaquen por su resolución y en las características de los apartados de cada una de las tareas.

Dado que los alumnos pueden utilizar diferentes sistemas de representación en sus respuestas, las categorías referentes a los sistemas de representación no son disjuntas en ninguno de los apartados y en ninguna de las tareas.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, nos basamos en la teoría fundamentada de Corbin y Strauss (1990) para establecer sub-categorías de la categoría estrategias, según las producciones escritas de los alumnos, las cuales se detallan en cada tarea.

En el siguiente esquema se aprecian la categoría estrategias y sus correspondientes sub-categorías (ver figura 5.1).



Nota. n = números de niños de la relación; v = valor de la variable dependiente para un niño.

Figura 5.1. Esquema de sub-categorías de categoría estrategias

Para una mejor comprensión de las sub-categorías a las que hacemos referencias, pondremos ejemplos (en cada tarea) de las producciones escritas de los alumnos, para cada una de las sub-categorías encontradas en la categoría estrategias.

5.1.1. Tarea 1

La tarea 1 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de gorros), a través de la función $f(x)=x$, y se compone de ocho apartados etiquetados desde la letra A a la letra H. En la tabla 5.1 recogemos un

resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 1.

Tabla 5.1. Respuestas, sistemas de representación y estrategias en tarea 1

R	RC	SR			Estrategia			
					Conteo de dibujos		Respuesta directa	
		P	S	V	Relación 1 a 1	Sin relación	Relación 1 a 1	Sin relación
					Apartado A			
32	32	29	12	0	29	0	3	0
					Apartado B			
32	32	28	11	1	28	0	4	0
					Apartado C			
32	31	29	11	0	28	1	3	0
					Apartado D			
31	28	26	7	2	24	2	5	0
					Apartado E			
31	31	25	8	2	25	0	6	0
					Apartado F			
31	28	25	8	2	22	3	6	0
					Apartado G			
31	27	25	8	2	19	5	7	0
					Apartado H			
32	23	5	14	26	2	3	21	6

Nota. R = responden; RC = respuesta correcta; SR = sistema de representación; P = pictórico; S = simbólico; V = verbal.

Como podemos observar en la tabla 5.1, todos los alumnos responden a los apartados A, B, C y H. Hay un alumno que no responde a los apartados D, E, F y G. Todos los alumnos, con excepción de uno de ellos respondieron a todos los apartados y, en su gran mayoría, lo hicieron correctamente.

En los cuatro primeros apartados (A, B, C y D), donde los casos particulares son consecutivos, apreciamos que casi la totalidad de los alumnos contesta de forma correcta. Cuando los casos particulares no son consecutivos (E, F, G y H), baja un poco el número de alumnos que contestan correctamente a estos apartados. En el apartado de generalización (apartado H) es al que menor número de alumnos respondieron correctamente (23).

Como observamos en la tabla 5.1, los alumnos utilizaron los sistemas de representación pictórico, simbólico y verbal. El sistema de representación pictórico es predominante en la mayoría de los apartados de esta tarea y el sistema de representación verbal es el

menos empleado. Esta situación se invierte en el último apartado, donde el que menos se utiliza es el pictórico y el sistema de representación verbal es el más empleado.

En la tabla 5.1 podemos observar que la mayor parte de los alumnos utilizaron los dibujos como estrategias para resolver cada uno de los apartados, exceptuando el apartado H, en el cual se hace explícita la petición de redactar una respuesta para explicar, a otra persona, la relación que observan. Notamos también que alrededor de un tercio de los alumnos utilizaron o complementaron sus respuestas con números como representación simbólica y que menos de una décima parte utilizaron el sistema de representación verbal. El apartado H, como comentamos anteriormente, es extraordinario porque 26 alumnos utilizaron este tipo de sistema de representación.

Observamos que la estrategia más utilizada es la de dibujar tantos gorros como niños estaban invitados a la fiesta (relación 1 a 1), llegando a ser utilizada por alrededor de dos tercios de los alumnos de la muestra. En la figura 5.2 mostramos un ejemplo de esta estrategia para el apartado F.

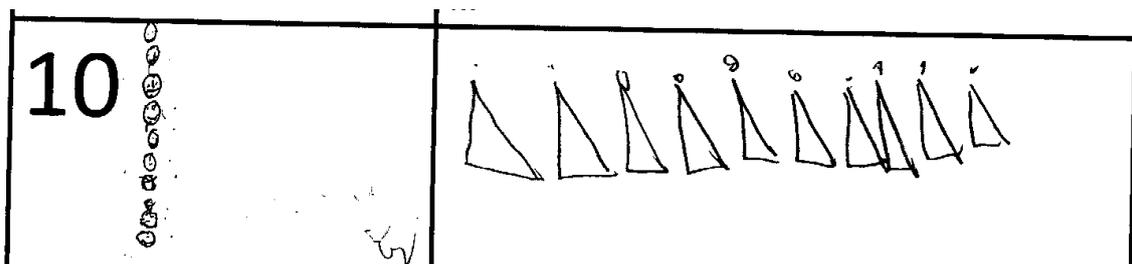


Figura 5.2. Conteo de dibujos en relación 1 a 1. Alumno 29. Tarea 1, apartado F

Observamos algunos dibujos en las producciones escritas en los cuales no fuimos capaces de encontrar una relación aparente o una estrategia específica. En cuanto a las respuestas directas, un tercio de los alumnos solo aportaron un número, la relación que establecieron fue 1 a 1.

En esta tarea identificamos dos estrategias diferentes: (a) la realización de un conteo sobre dibujos y (b) respuesta directa. En ambas estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 1 y los que no identificaron ninguna relación.

Las detallamos a continuación.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 1. Las respuestas que se corresponden con esta categoría presentan tantos dibujos como número de niños haya en la relación.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay dibujos pero no se observa relación entre los dibujos y el número de niños dado.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 1. En las respuestas encontramos el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.

5.1.1.1. Apartado A (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 2 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizados en el apartado A, 20 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta. De ellos 9 utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico simultáneamente. En cuanto a las estrategias utilizadas, todos los alumnos identificaron la relación 1 a 1 entre el número de niños y número de gorros. 29 de ellos utilizaron dibujos para realizar el conteo y 3 dieron una respuesta numérica directa.

5.1.1.2. Apartado B, (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado B, 20 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta y 1 alumno utiliza la representación verbal para expresar su solución, hay 8 alumnos que utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, todos establecieron la relación 1 a 1, 28 alumnos utilizaron dibujos y 4 dieron una respuesta numérica directa.

5.1.1.3. Apartado C (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado C, se desglosan de la siguiente manera, 21 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado C y 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta, 8 alumnos utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico al dar su respuesta. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos, 31 de ellos dieron una respuesta en relación 1 a 1, 28 de los cuales utilizaron dibujos y 3 dieron una respuesta numérica directa, 1 alumno dibujó gorros sin una relación aparente.

5.1.1.4. Apartado D (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado D, 24 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico como respuesta, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y 2 alumnos solo el verbal, hay 2 alumnos que utilizan el sistema de representación pictórico y simbólico para dar la respuesta a este apartado y 2 que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal en su respuesta. En las estrategias utilizadas por los alumnos, 29 de ellos establecieron la relación 1 a 1, 24 de los cuales utilizaron dibujos y 5 dieron una respuesta numérica directa, 2 alumnos dibujaron gorros sin una relación aparente (ver figura 5.3).

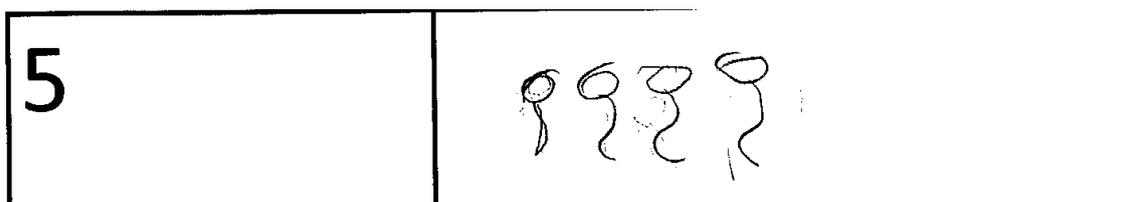


Figura 5.3. Conteo de dibujos sin relación. Alumno 20. Tarea 1, apartado D

5.1.1.5. Apartado E (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado E, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y 2 alumnos redactan su respuesta utilizando el sistema de representación verbal, observamos que hay 2 alumnos

que utilizan el sistema de representación simbólico y pictórico y 2 alumnos que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal. En las estrategias utilizadas por los alumnos, todos los alumnos establecieron la relación 1 a 1 en sus respuestas (ver figura 5.4), 25 de los cuales utilizaron dibujos y 6 alumnos dieron una respuesta numérica directa.

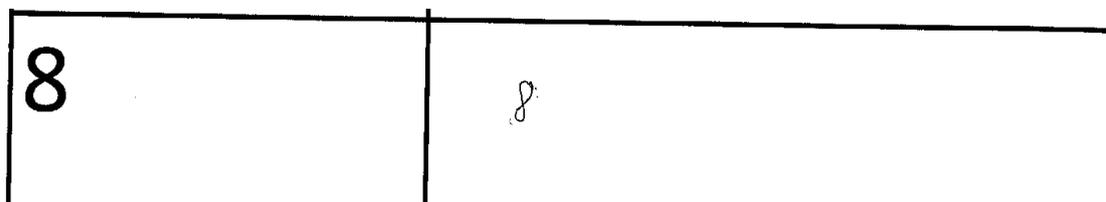


Figura 5.4. Respuesta directa en relación 1 a 1. Alumno 30. Tarea 1, apartado E

5.1.1.6. Apartado F (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En el apartado F, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta, 2 alumnos utilizaron el sistema pictórico y simbólico en su respuesta y 2 el sistema simbólico y sistema de representación verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron, 28 alumnos establecen la relación 1 a 1 en sus respuestas, 22 de ellos utilizaron dibujos, 6 dieron una respuesta numérica directa y 3 alumnos dibujaron gorros sin relación aparente.

5.1.1.7. Apartado G (¿Cuántos gorros tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En los sistemas de representación utilizados en el apartado G, 23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 2 alumnos utilizan tanto el sistema de representación pictórico como el simbólico y 2 utilizan el sistema de representación simbólico y el sistema de representación verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas, 26 alumnos establecen la relación 1 a 1, 19 de ellos utilizaron dibujos y 7 dieron una respuesta numérica directa, 5 alumnos dibujaron gorros sin relación aparente entre el número de niños y el número de gorros.

5.1.1.8. Apartado H (Explícale a la mamá de Lola cuántos gorros tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado H fueron, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, 2 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, dando números en su respuesta y 26 alumnos redactan su respuesta utilizando solo el sistema de representación verbal para dar una explicación a la mamá de Lola, 12 utilizan el sistema de representación simbólico y verbal.

En cuanto a las estrategias utilizadas, 23 alumnos establecieron la relación 1 a 1, 2 de ellos utilizaron dibujos y 21 dieron una respuesta numérica directa, 9 alumnos dieron una respuesta sin relación (ver figura 5.5), de los cuales 3 alumnos dibujaron y 6 alumnos dan una respuesta numérica directa.

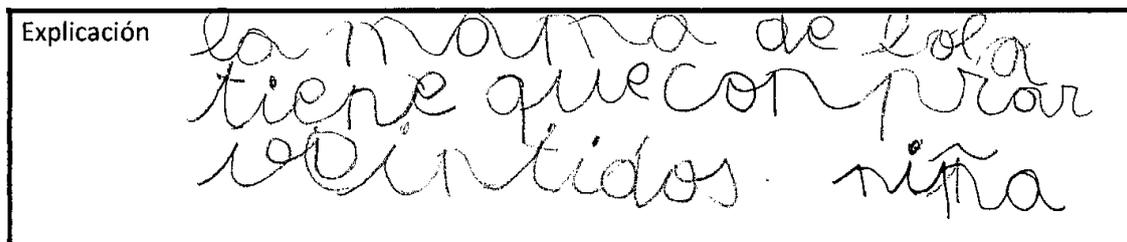


Figura 5.5. Respuesta directa sin relación. Alumno 3. Tarea 1, apartado H

Este apartado trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian un pensamiento funcional. Tenemos a los alumnos 6, 7, 12, 14 y 15, que hacen explícita la relación a continuación se muestra la respuesta del alumno 7.

Alumno 7 “Usted la mamá de Lola tiene que comprar 50 gorros porque usted su hija a invitado a 50 niños”

Observamos que establecen la relación 1 a 1, entre el número de gorros y el número de niños y que hacen explícita esta relación en frases como por ejemplo, porque ha invitado a esos niños.

5.1.2. Tarea 2

La tarea 2 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de piruletas), a través de la función $f(x)=3x$, y se compone de siete apartados etiquetados desde la letra A a la letra G. En las tablas 5.2 y 5.3 recogemos un resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 2.

Tabla 5.2. Respuestas y sistemas de representación en tarea 2

Responden	Responden correctamente	Apartado	Sistema de representación		
			Pictórico	Simbólico	Verbal
32	13	Apartado A	29	8	0
32	12	Apartado B	29	8	0
31	7	Apartado C	28	7	2
30	2	Apartado D	25	8	1
30	3	Apartado E	26	8	0
28	1	Apartado F	24	6	1
22	0	Apartado G	1	11	20

Podemos observar en la tabla 5.2, que la mayor parte de los alumnos contestaron a los apartados de esta tarea, llegando a que en el apartado G, que es el que menor cantidad de respuestas tiene, sean 22 alumnos los que contestaron, la progresión de alumnos que contesta correctamente al apartado disminuye hasta desaparecer.

Notamos que en los dos primeros apartados (A y B) el número de respuestas correctas son alrededor de un tercio, en el apartado C es alrededor de un cuarto y en los apartados siguientes (D, E y F), no llega ni a la décima parte, ningún alumno contesta correctamente el apartado G.

La mayor parte de los alumnos, alrededor de $\frac{4}{5}$ de ellos, utilizaron los dibujos, es decir, el sistema de representación pictórico como medio para resolver cada uno de los apartados y que complementan con números, un cuarto de los alumnos utilizan el sistema de representación simbólico. Habiendo algunos alumnos que expresan su respuesta en forma verbal.

Cabe mencionar que el apartado G, insta al alumno a verbalizar su respuesta y explicación, por lo que los sistemas de representaciones se invierten en orden de utilización quedando $\frac{2}{3}$ de los alumnos con representación verbal, un tercio con representación numérica, siendo solo 1 de ellos el que utiliza un dibujo para representar la respuesta.

En la tarea 2 identificamos tres estrategias diferentes (a) la realización de conteo de dibujos, (b) respuesta directa y (c) creación de grupos con 3 elementos. En las diferentes estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 3, la relación 1 a 1 o la relación $n+3$, también identificamos a alumnos que solo escribieron o dibujaron 3 o que no identificaron ninguna relación. Las cuales se detallan a continuación.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 3. Las respuestas que están en esta categoría muestran tantos dibujos por cada niño como le fueron pedidos en la relación dada.
- Relación 1 a 1. Las respuestas que están en esta categoría muestran
- tantos dibujos como niños estén en la relación.
- Relación $n+3$. Las respuestas que se corresponden con esta categoría presentan el dibujo del número de niños dados más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay dibujos pero no hay relación entre los dibujos y el número de niños dados.
- Dibujo de 3 elementos. Se trata de respuestas donde solo dibujan los elementos del caso particular de 1 niño, creando una relación constante para cualquier caso.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 3. En las respuestas de esta categoría encontramos el número de la relación 1 a 3, como fue pedido en el apartado de tarea.

- Relación 1 a 1. En las respuestas encontramos que escribe el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Relación n+3. En las respuestas de esta categoría escribe el número de niños más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas en las que hay un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.
- 3. Encontramos por respuesta solo el número de elementos de la segunda variable, sin explicación.

Asociación de elementos en grupos:

- Todos los grupos correctos. Se trata de respuestas, donde encontramos grupos con 3 elementos o con números 3 y todos los grupos tienen el número correcto de elementos.
- Algunos incorrectos. Se trata de respuestas, donde encontramos grupos con 3 elementos y algunos de los grupos tienen más o menos elementos que los requeridos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que se cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están consideradas las respuestas que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

Tabla 5.3. Estrategias en tarea 2

Conteo de dibujos					Estrategias								
					Respuesta directa					AG			
R	R	R	SR	3	R	R	R	SR	3	TC	AI	CNNR	OE
1-3	1-1	n+3			1-3	1-1	n+3						
Apartado A													
10	7	0	1	6	1	0	0	2	0	2	0	1	2
Apartado B													
8	8	0	0	6	2	0	0	2	0	2	0	2	2
Apartado C													
4	16	0	1	1	1	0	0	1	1	2	0	2	2

Tabla 5.3. Estrategias en tarea 2

Conteo de dibujos					Estrategias					AG			
R	R	R	SR	3	R	R	R	SR	3	TC	AI	CNNR	OE
1-3	1-1	n+3			1-3	1-1	n+3						
Apartado D													
1	14	0	2	1	0	0	0	2	2	1	0	5	2
Apartado E													
2	15	1	2	0	0	0	1	1	2	1	1	2	2
Apartado F													
1	11	1	5	0	0	1	1	2	2	0	0	3	1
Apartado G													
0	0	0	1	0	0	12	2	5	0	0	0	0	2

Nota. R 1-3 = relación 1 a 3; R 1-1 = relación 1 a 1; R n+3 = relación n+3; SR = sin relación; 3 = escribe solo 3; AG = asociación en grupos; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

Observamos en la tabla 5.3, que la mayor concentración de respuestas se da en torno a la relación de las variables 1 a 1, también, que a medida que los valores de la variable independiente aumentan, las estrategias se desplazan a la relación 1 a 1 o bien n+3. También observamos que toma fuerza la creación de grupos de 3 elementos para los primeros valores de la variable independiente, pero que a medida que los valores aumentan se cometen errores en la conformación de los grupos, lo que lleva al alumno a la respuesta errónea, también nos damos cuenta que el cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común cuando los valores no son consecutivos y los alumnos siguen con la secuencia numérica encontrada; alrededor de 2 alumnos por apartado evidencian otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.1. Apartado A (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizadas en el apartado A, 24 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución a este apartado, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 5 alumnos utilizaron el sistema de representación pictórico y simbólico simultáneamente. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos en este apartado, 13 alumnos identificaron la relación 1 a 3 (ver figura 5.6), 10 de ellos utilizaron dibujos, 1 dio una respuesta directa y 2 crearon grupos, 7 alumnos identificaron la relación 1 a 1 con conteo de dibujos, 1 alumno cambia el número de niños de la relación, 6 alumnos dan por respuesta el dibujo

de 3 piruletas, 3 alumnos no identifican ninguna relación entre las variables y 2 alumnos dieron una respuesta donde utilizan otra relación que los lleva a una respuesta errónea.

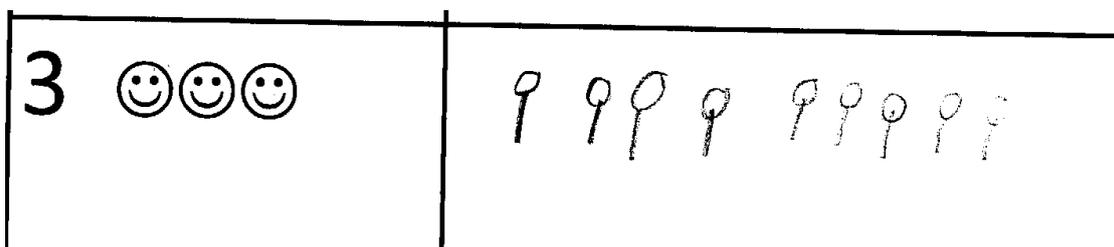


Figura 5.6. Conteo de dibujos en relación 1 a 3. Alumno 8. Tarea 2, apartado A

5.1.2.2. Apartado B (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados en el apartado B fueron, solo el pictórico (24) y solo el simbólico (3), hubo 5 alumnos que utilizaron los dos sistemas de representación en sus respuestas. Las estrategias utilizadas por los alumnos en este apartado, fueron: 12 alumnos identifican la relación 1 a 3 entre el número de niños y el número de piruletas, 10 de ellos lo hacen por conteo de dibujos, 1 por respuesta directa (ver figura 5.7) y 2 por conformación de grupos; 8 alumnos identificaron la relación 1 a 1, todos ellos dibujaron, 6 alumnos utilizaron la constante 3 dibujos de piruletas, 2 alumnos escribieron un número sin relación aparente; 2 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado y 2 dan otra estrategia que no soluciona el problema.

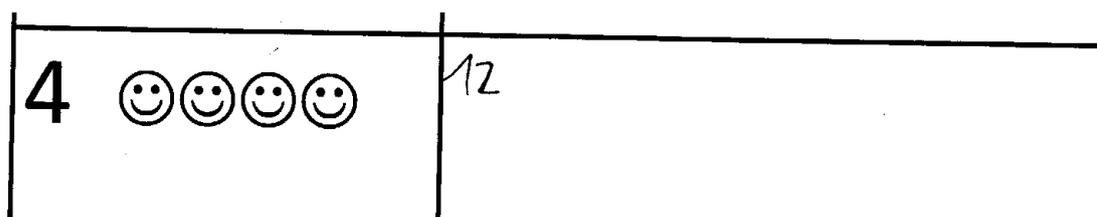


Figura 5.7. Respuesta directa en relación 1 a 3. Alumno 6. Tarea 2, apartado B

5.1.2.3. Apartado C (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

23 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico para dar solución al apartado C, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico y se agrega el sistema de representación verbal que no había sido utilizado en los apartados anteriores de esta tarea, 1 alumno utilizó este sistema de representación, 4 alumnos utilizan el sistema de representación pictórico y simbólico, 1 utiliza los sistemas de

representación pictórico y verbal y otro alumno utiliza los sistemas de representación simbólico y verbal. En las estrategias utilizadas por los alumnos, 7 alumnos identifican la relación 1 a 3, 4 alumnos a través del conteo de dibujos, 1 por respuesta directa y 2 conformando grupos, un ejemplo de esta categoría la podemos ver en la figura 5.8.

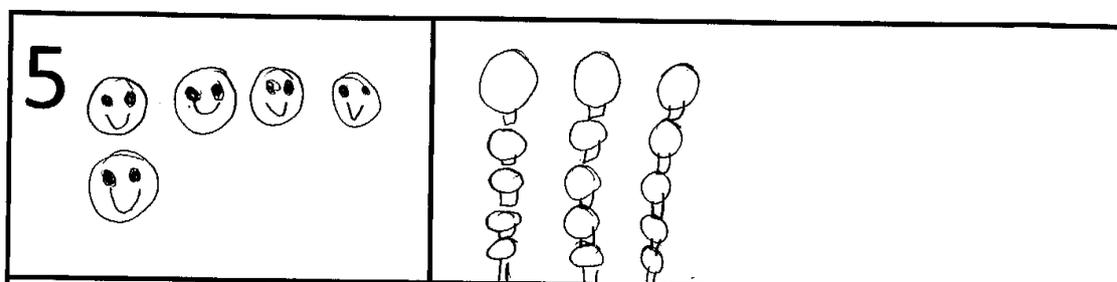


Figura 5.8. Creación de grupos con todos los elementos correctos.
Alumno 12. Tarea 2, apartado C

16 alumnos identifican la relación 1 a 1 a través del conteo de dibujos; 2 alumnos solo utilizan el número 3, uno con dibujos y el otro en respuesta directa, un ejemplo de solo dibuja 3 piruletas la podemos ver en la figura 5.9.

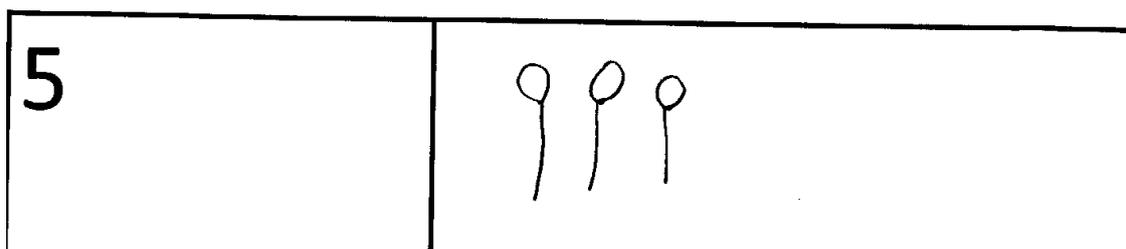


Figura 5.9. Conteo de dibujos solo 3. Alumno 29. Tarea 2, apartado C

2 alumnos escriben una respuesta sin relación aparente, 2 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado y 2 alumnos dan otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.4. Apartado D (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En este apartado (D), 21 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico como respuesta, 4 alumnos utilizaron solo el sistema de representación simbólico, 1 alumno utiliza solo el sistema de representación verbal, 4 alumnos utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron: 2 alumnos identificaron la relación 1 a 3, uno de ellos dibujó mientras

que el otro agrupó; 14 identificaron la relación 1 a 1, todos ellos dibujaron; 3 alumnos identifican una constante y 4 alumnos no identifican ninguna relación aparente, 5 alumnos cambian el número de niños involucrados en el apartado (ver figura 5.10) y 2 alumnos dan otra estrategia que no soluciona el problema.

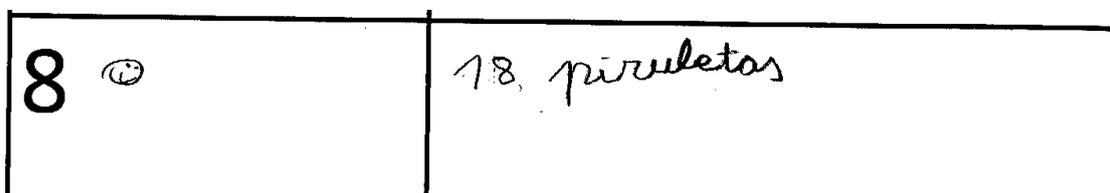


Figura 5.10. Cambia el número de niños (6) de la relación.
Alumno 7. Tarea 2, apartado D

5.1.2.5. Apartado E (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación que utilizaron en su mayoría son el sistema de representación pictórico (22) y 4 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, 4 alumnos utilizan al mismo tiempo los sistemas de representación pictórico y simbólico. Al analizar las diferentes estrategias que utilizaron nos encontramos con que 4 alumnos identificaron la relación 1 a 3, 2 de ellos a través de un dibujo y los otros dos por medio de conformación de grupos, aunque uno tuvo un error en la agrupación (ver figura 5.11).

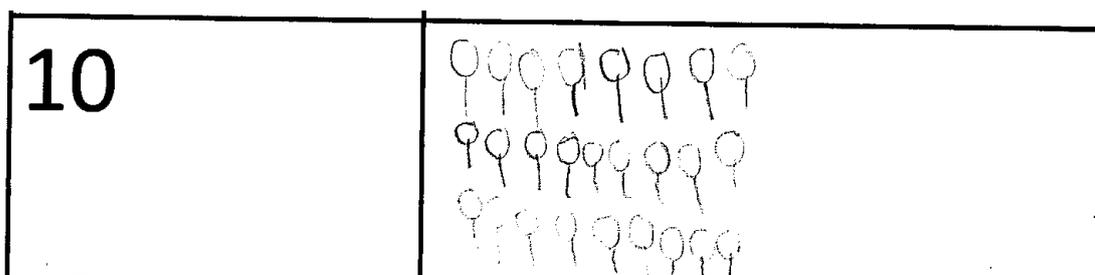


Figura 5.11. Creación de grupos algunos incorrectos. Alumno 19. Tarea 2, apartado E

15 alumnos identificaron la relación 1 a 1 a través de dibujos; 2 alumnos identifican la relación $n+3$ (ver figura 5.12).

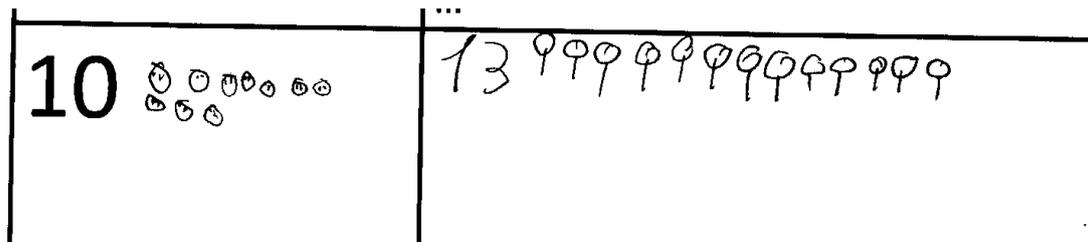


Figura 5.12. Conteo de dibujos en relación $n+3$. Alumno 5. Tarea 2, apartado E

3 alumnos no establecen una relación aparente, 2 alumnos cambian el número de niños que son invitados a la fiesta y 2 utilizaron otra estrategia que no soluciona el problema (ver figura 5.13).

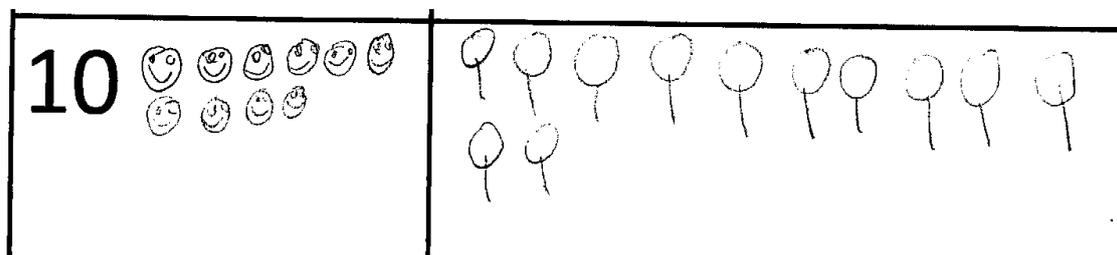


Figura 5.13. Otra estrategia ($n+2$). Alumno 3. Tarea 2, apartado E

5.1.2.6. Apartado F (¿Cuántas piruletas tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En este apartado (F), predomina el sistema de representación pictórico, con 21 alumnos y 3 alumnos utilizaron solo el sistema simbólico, 1 alumno solamente utiliza el sistema de representación verbal, encontramos a 3 alumnos que utilizan en conjunto los sistemas pictórico y simbólico. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para responder a este apartado, nos encontramos con que 1 alumno identifica la relación 1 a 3 y lo hace utilizando dibujos, 12 alumnos identifican la relación 1 a 1, 11 de los cuales dibujan, uno de ellos escribe la respuesta directa, 2 alumnos identifican la relación $n+3$, tanto en conteo de dibujos como en respuesta directa, 7 alumnos no encuentran relación aparente, 2 alumnos consideran la relación como constante, 3 alumnos cambiaron el número de niños involucrado en el apartado y 1 utilizó otra estrategia que no soluciona el problema.

5.1.2.7. Apartado G (Explícale a la mamá de Lola cuántas piruletas tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

El sistema de representación que predomina con casi 2/3 de los alumnos de la muestra es el verbal, le siguen el sistema de representación simbólico y verbal en conjunto con 10 alumnos y 1 que utiliza solo el sistema de representación pictórico. En las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado nos encontramos con que 12 alumnos establecen la relación 1 a 1 con respuestas directas; 2 establecen la relación $n+3$, un ejemplo de esta categoría lo encontramos en la figura 5.14; 6 alumnos no establecen una relación aparente y 2 alumnos utilizaron otra estrategia que no soluciona el problema propuesto.

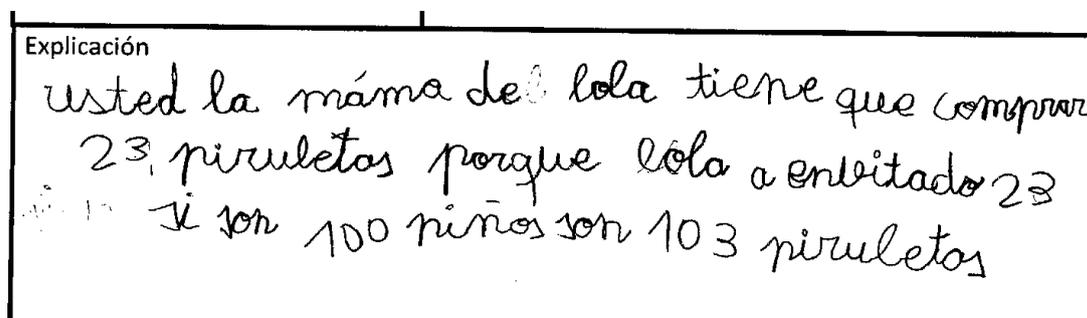


Figura 5.14. Respuesta directa en relación $n+3$. Alumno 7. Tarea 2, apartado G

En este apartado, que trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian pensamiento funcional. Tenemos a los alumnos 4, 6, 7, 12, 15, 22 y 26, que hacen explícita la relación y de los cuales hemos transcrito textualmente la respuesta del alumno 15.

Alumno 15 “Es el cumpleaños de David y hay 100 niños necesita 103”

Observamos que la relación más frecuentemente utilizada es 1 a 1, y que los alumnos 7 y 15, establecen la relación $n+3$, no encontramos ninguna respuesta correcta en este apartado (G).

5.1.3. Tarea 3

La tarea 3 consiste en relacionar la variable independiente (número de niños) y la dependiente (número de globos), a través de la función $f(x)=5x$, y se compone de siete apartados etiquetados desde la letra A hasta la letra G. En la tabla 5.4 y 5.5 recogemos

un resumen de resultados sobre el número de alumnos para cada una de las variables consideradas para la tarea 3.

Tabla 5.4. Respuestas y sistemas de representación en tarea 3

Responden	Responden correctamente	Sistema de representación			
		Pictórico	Simbólico		Verbal
	N		O		
Apartado A					
32	10	14	20	3	3
Apartado B					
32	10	14	20	3	3
Apartado C					
30	7	16	15	2	3
Apartado D					
30	4	16	15	2	3
Apartado E					
29	3	16	14	2	3
Apartado F					
28	0	14	13	2	4
Apartado G					
22	1	2	11	1	19

Nota. N = números; O = operaciones.

En esta tarea nos encontramos con que algunos alumnos utilizaron operaciones en sus respuestas, valorando esta introducción de simbología, hacemos la diferencia en el sistema de representación simbólico, entre número y operación.

Como observamos en la tabla 5.4, en los primeros apartados de casos particulares consecutivos casi la totalidad de los alumnos contestan a estos apartados (A, B, C), en los casos particulares no consecutivos (D, E, F) observamos que el número de alumnos que contestan a estos apartados va disminuyendo, llegando a solo 22 niños en el apartado G, que trata de generalizar la relación para 100 niños. La mayoría no llegó a la respuesta correcta.

Apreciamos que son pocos los alumnos que contestan correctamente a cada uno de los apartados de la tarea 3. En los tres primeros apartados, donde los valores de la variable independiente son consecutivos, observamos que los alumnos que contestan correctamente son alrededor de 10, pero cuando los valores no son consecutivos vemos decaer estas cifras hasta que solo 1 alumno contesta el apartado G correctamente.

Podemos observar que, alrededor de un tercio de los alumnos, utilizaron los dibujos, es decir, la representación pictórica como medio para resolver cada uno de los apartados y que complementan con números, alrededor de $\frac{2}{3}$ de los alumnos, en la categoría de representación simbólica, destacando que hay un pequeño grupo de 2 o 3 alumnos que trabaja con operaciones, habiendo algunos alumnos que expresan su respuesta en forma verbal. Se menciona aparte el apartado G que pide expresamente que se explique el por qué de la respuesta dada, donde el sistema de representación que tiene mayor predominio es el verbal (18) seguido del simbólico (12).

En la tarea identificamos tres estrategias diferentes; (a) la realización de un conteo sobre dibujos, (b) respuesta directa y (c) creación de grupos con 5 elementos. En las diferentes estrategias, distinguimos entre los alumnos que identificaron la relación 1 a 5, la relación 1 a 1 o la relación $n+5$, también identificamos a alumnos que solo escribieron o dibujaron 5 o que no identificaron ninguna relación. A continuación describimos las categorías encontradas en esta tarea.

Conteo de dibujos:

- Relación 1 a 5. Las respuestas que se corresponden con en esta categoría presentan tantos dibujos por cada niño como le fueron pedidos en la relación dada.
- Sin relación. Se trata de respuestas donde hacen dibujos pero no hay relación entre los dibujos y los niños dados.

Respuesta directa:

- Relación 1 a 5. Las respuestas de esta categoría se corresponden con que escriben el número de la relación 1 a 5, como fue pedido en el apartado de tarea.
- Relación 1 a 1. Se trata de respuestas donde encontramos que escribe el mismo número de niños que de la variable pedida.
- Relación $n+5$. Las respuestas que se corresponden con esta categoría son la escritura del número de niños más el número de elementos dados en la segunda variable.
- Sin relación. Se trata de respuestas donde está escrito un número que no tiene relación aparente con el número de niños dado.

Asociación de elementos en grupos:

- Todos los grupos correctos. En las respuestas de esta categoría encontramos grupos con 5 elementos o con números 5 y todos los grupos tienen el número correcto de elementos.
- Algunos incorrectos. En las respuestas de esta categoría encontramos grupos con 5 elementos y algunos de los grupos tienen más o menos elementos que los requeridos.

Cambia el número de niños de la relación

En esta categoría consideraremos las respuestas en las que los alumnos cambian el número de niños dado de la relación.

Otra estrategia

En esta categoría están considerados los alumnos que establecieron alguna otra estrategia, pero que no soluciona el problema.

Tabla 5.5. Estrategias en tarea 3

Estrategia										
Conteo de dibujos			Respuesta directa				Asociación en grupos			
R 1-5	R 1-1	SR	R 1-5	R 1-1	R n+5	SR	TC	AI	CNNR	OE
Apartado A										
5	3	4	4	1	3	8	3	0	0	1
Apartado B										
3	4	3	4	1	1	9	4	0	2	1
Apartado C										
1	10	1	2	1	1	9	3	0	1	1
Apartado D										
1	10	1	1	1	1	10	3	0	2	1
Apartado E										
1	10	1	1	1	1	9	2	0	3	1
Apartado F										
0	5	6	0	1	1	9	1	1	3	1
Apartado G										
0	0	2	0	12	2	5	1	0	0	0

Nota. R 1-5 = relación 1 a 5; R 1-1 = relación 1 a 1; R n+5 = relación n+5; SR = sin relación; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

Observamos en la tabla 5.5, que la relación 1 a 1 es utilizada por un tercio de los alumnos, un cuarto de los alumnos establece la relación 1 a 5 en los primeros apartados, pero a medida que estos aumentan en complejidad al aumentar el número de niños invitados, el número de alumnos decae progresivamente. Otra estrategia utilizada es la relación $n+5$, con 1 o 2 alumnos que las utilizaron en el transcurso de la tarea. Toma fuerza la creación de grupos para todos los apartados, con 3 alumnos que la utilizaron continuamente como estrategia, solo en uno de los apartados hay uno de esos alumnos que crea alguno de los grupos con el tamaño incorrecto, lo que lo lleva a una respuesta errónea. También nos damos cuenta que el cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común (3 alumnos) cuando los valores no son consecutivos y los alumnos siguen con la secuencia numérica encontrada; 1 alumno por apartado evidencia otra estrategia que no soluciona el problema, esto lo podemos observar en la figura 5.15.

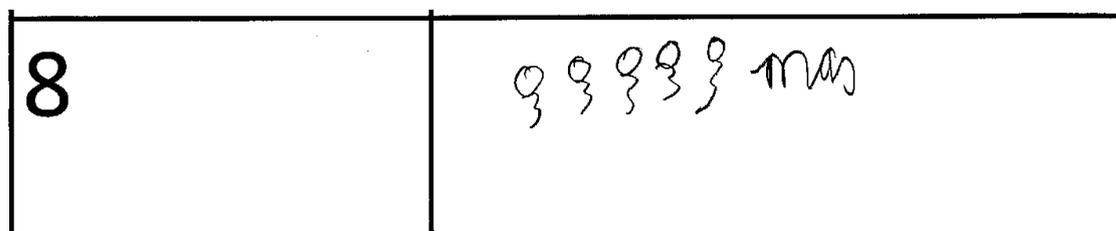


Figura 5.15. Otra estrategia. Alumno 27. Tarea 3, apartado D

5.1.3.1. Apartado A (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación utilizados por los alumnos en el apartado A, 10 alumnos utilizaron solo el sistema de representación pictórico, por primera vez en el transcurso de los apartados y de las tareas anteriores hay alumnos que utilizaron en el sistema simbólico las operaciones (3), además de los números (2), 15 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, hay 1 alumno que utilizó solo el sistema de representación verbal para dar a conocer su respuesta. Hemos identificado a 4 alumnos que utilizan en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico y 2 que utilizan el sistema de representación simbólico y verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 12 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 5 de ellos a través de dibujos, 4 nos entregaron una respuesta directa y 3 utilizaron la conformación de grupos; 4 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó.

5.1.3.2. Apartado B (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados por los alumnos fueron: 10 alumnos usaron solamente el sistema de representación pictórico, 15 solamente el sistema de representación simbólico, 1 alumno utilizó solo el sistema de representación verbal. Destacamos a 4 alumnos que utilizaron tanto el sistema de representación pictórico como simbólico y 2 que utilizaron tanto el sistema de representación simbólico como el verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 11 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 3 de ellos a través de dibujos, 4 nos entregaron una respuesta directa y 4 utilizaron la conformación de grupos; 5 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó.

5.1.3.3. Apartado C (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Podemos observar que los sistemas de representación utilizados en el apartado C, fueron: 13 alumnos que utilizaron solamente el sistema de representación pictórico, 11 alumnos utilizaron solamente el sistema de representación simbólico, 3 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal. 3 alumnos utilizaron en conjunto el sistema de representación pictórico y simbólico y 2 el simbólico y verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado: 6 alumnos identificaron la relación 1 a 5, de ellos 2 a través de una respuesta directa, 1 con dibujos y 3 utilizaron la conformación de grupos (ver figura 5.16); 11 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y los demás alumnos dibujaron.

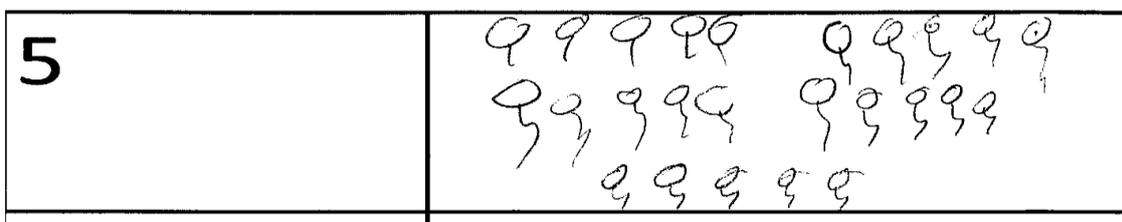


Figura 5.16. Creación de grupos. Alumno 26. Tarea 3, apartado C

5.1.3.4. Apartado D (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?)

En cuanto a los sistemas de representación que utilizaron, 13 alumnos trabajan solo con la representación pictórica, 11 alumnos solo con la representación simbólica, 1 alumno utilizó solo el sistema de representación verbal. En conjunto, se utilizaron los sistemas de representación pictórico y simbólico (2) y simbólico y verbal (2). En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 4 alumnos identificaron la relación 1 a 5, 1 de ellos a través del conteo de dibujos y 3 utilizaron la conformación de grupos; 11 alumnos establecieron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y el resto dibujó para solucionar el problema. 1 alumno estableció la relación $n+5$, su respuesta la podemos ver en la figura 5.17.

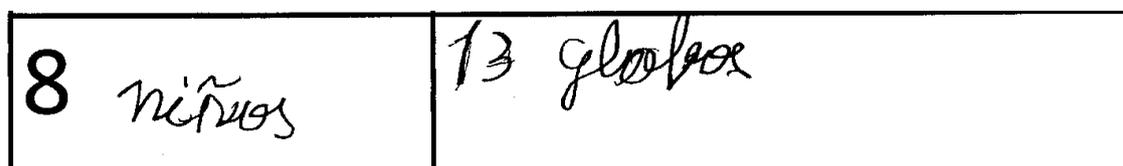


Figura 5.17. Respuesta directa en relación $n+5$. Alumno 5. Tarea 3, apartado D

5.1.3.5. Apartado E (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Observamos que los sistemas de representación que utilizaron para resolver el apartado E, se desglosan de la siguiente manera: 13 alumnos trabajaron solamente con el sistema de representación pictórico, 10 alumnos solo con el sistema de representación simbólico, 1 alumno utilizó solamente el sistema de representación verbal. En conjunto trabajaron con el sistema de representación pictórico y simbólico (3) y simbólico y verbal (2). En cuanto a las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado, 3 alumnos identificaron la relación 1 a 5, uno de ellos a través de dibujos (ver figura 5.18) y 2 utilizaron la creación de grupos; 11 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales 10 dibujaron y un alumno nos entregó una respuesta directa.

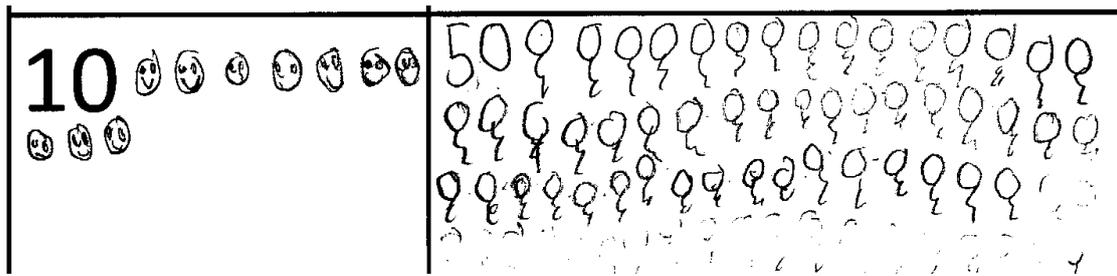


Figura 5.18. Conteo de dibujos en relación 1 a 5. Alumno 15. Tarea 3, apartado E

5.1.3.6. Apartado F (¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?)

Los sistemas de representación utilizados para resolver este apartado (F), fueron: 12 alumnos solo utilizaron el sistema de representación pictórico, 10 solo el simbólico, 2 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal. Notamos que 2 alumnos utilizaron el sistema simbólico y pictórico simultáneamente y 2 el simbólico y verbal. Las estrategias utilizadas por los alumnos para resolver este apartado: 2 alumnos identifican la relación 1 a 5 a través de la conformación de grupos, aunque uno de ellos se equivoca en la conformación de alguno de los grupos, lo cual le lleva a una respuesta errónea; 6 alumnos identificaron la relación 1 a 1, de los cuales uno nos entregó una respuesta directa y los otros alumnos utilizaron el conteo de dibujos.

5.1.3.7. Apartado G (Explícale a la mamá de Lola cuántos globos tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.)

En el apartado G, los sistemas de representación que los alumnos utilizaron, fueron: 9 alumnos utilizaron solo el sistema de representación verbal, seguido por 1 alumno que utilizó solo el simbólico, solo 2 alumnos utilizaron un dibujo para dar solución al apartado. Observamos que 10 alumnos utilizan en conjunto el sistema simbólico y verbal. En cuanto a las estrategias utilizadas, 1 alumno identificó la relación 1 a 5 a través de la conformación de grupos y 12 alumnos identificaron la relación 1 a 1 en su respuesta directa.

En este apartado que trata que el alumno generalice la relación a través de un caso lejano (100 niños) y donde se le pide que le dé la explicación del porqué de su respuesta a otra persona, encontramos frases que evidencian un pensamiento funcional, aunque este no sea el correcto. Tenemos a los alumnos 1, 4, 6, 7, 12, 15 y 31, que hacen

explicita la relación funcional que establecen, se puede ver a continuación la respuesta del alumno 4.

Alumno 4 “aisien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100”
(hay cien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100)

Observamos que la relación más común es 1 a 1 y que en algunos casos establecieron la relación $n+5$, el alumno 4 sigue una serie de números 5 hasta llegar al niño 100.

5.2. Entrevistas individuales

En este apartado presentamos los resultados procedentes de las entrevistas realizadas a 4 alumnos (alumnos 7, 12, 15 y 27) y las producciones escritas de cada uno de esos alumnos. Nos centramos en las evidencias del pensamiento funcional puestas de manifiesto a través de las explicaciones que dan sobre su trabajo en la prueba escrita y la producción escrita en el instrumento aplicado en la entrevista. El objetivo de la entrevista era profundizar sobre el pensamiento funcional en la relación directa e inversa, por lo que organizaremos cada una de las entrevistas según estos dos sistemas de relaciones consideradas. Inicialmente, presentamos para cada alumno, el trabajo que hizo en la prueba escrita, complementando con las explicaciones que dieron en la entrevista sobre su propia producción. A continuación, presentamos los resultados que ayudaron a completar las entrevistas sobre la relación directa y resultados sobre la relación inversa, incorporación de un término independiente y relación entre varias variables, proceso descrito en el capítulo 4, apartado 4.4.2 de esta memoria.

5.2.1. Entrevista alumno 7

Los criterios para entrevistar al alumno 7, fueron que estableció la relación $n+v$ entre las variables, y que aunque fue capaz de establecer relaciones entre las variables, había ítems que contestaba erróneamente porque seguía una secuencia consecutiva cuando los valores de la variable no eran consecutivos. En la tabla 5.6 recogemos los resultados del alumno 7 en la prueba escrita, información de la que partimos para la preparación de la entrevista.

Tabla 5.6. Resultados prueba escrita alumno 7

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
			Tarea 1					
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabla 5.6. Resultados prueba escrita alumno 7

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
SR	Pictórico y simbólico				Simbólico y verbal			
Estrategia	Conteo de dibujos R1-1				Respuesta directa R1-1			
Tarea 2								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	✓	x	x	x	x	
SR	Simbólico y verbal							
Estrategia	CNNR	OE	R1-3	CNNR	Relación n+3			
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	✓	x	x	x	x	
SR	Simbólico y verbal							
Estrategia	Respuesta directa R1-5			CNNR	Relación n+5			

Nota: SR = sistema de representación; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia; R1-3 = respuesta directa relación 1 a 3; R1-5 = relación 1 a 5.

Relación directa

En la prueba escrita el alumno contestó correctamente a los apartados de la tarea 1 utilizó la respuesta directa en relación 1 a 1, en la entrevista explicitó la relación funcional identidad "...pues al ver que si un niño, un gorro, pues 2 niños 2 gorros...".

En la tarea 2 el alumno incurrió en errores de conteo ya que entrega respuestas erróneas a los apartados A, B, en el apartado C entregó la respuesta correcta y en el apartado D cambió el número de niños, en vez de 8 niños utilizó 6 niños, en el apartado E, F y G utilizó la relación n+3, en la entrevista se dio cuenta de los errores y los rectificó utilizando material concreto, logró establecer la relación "más niños más piruletas", "tres piruletas más por cada niño que invitemos de más".

En la tarea 3 el alumno completó de forma correcta los apartados A, B, C, el apartado D, E, F, entrega un número sin relación aparente y en el apartado G utilizó la relación n+5, en la entrevista se dio cuenta que a un número pequeño (5 niños-25 globos) no le podían corresponder más globos que a un número grande (8 niños- 15 globos) y trata de solucionarlo encontrando la relación "5 más", "encontrar para cada niño 5 globos".

Relación inversa

Para la relación inversa entre número de niños y número de gorros, el alumno contestó de inmediato y correctamente, ya que estableció la relación "a un niño un gorro".

En la relación inversa número de niños y número de piruletas, respondió antes que se le preguntara “son 6, tres para un niño y tres para otro, son 2 niños”, el alumno con el material concreto formó grupos de 3 piruletas “porque son 3 las que tengo que contar”, “para 15 hay 5 niños”, “hemos puesto las 15 en montones de 3 piruletas y conté 5 montones, lo que me da 5 niños”.

En la relación inversa número de niños y número de globos, respondió estableciendo la relación “si uno es 5 globos, entonces para 2 serán 10”, formó grupos de 5 globos, relacionado los niños con cada grupo hasta completar los 25 globos pedidos y descubrir que son 5 niños los involucrados, “he puesto los 25 globos y hay 5 montones de globos...”.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no tuvo mayor dificultad para el alumno ya que estableció que “Por cada invitado un gorro y además el gorro de Lola”, utilizó dibujos solo en el primer caso para 4 niños, para 9 y 12 invitados, escribió directamente el sucesor del número, se le pregunta por 100 y 1000 y contestó correctamente.

Relación entre varias variables

Cuando se le pidió que relacionara todas las variables que había visto en el transcurso de las tareas de la prueba escrita y de la entrevista, donde solo se le dio el valor de las piruletas, partió por entregarle una a cada niño, se le hizo ver el error y que debían seguir la relación que ya estaba establecida, el alumno hizo grupos de 3 piruletas, relacionado un niño por cada grupo de piruletas, con ello descubrió el número de niños que están involucrados, luego hizo 3 grupos de 3 gorros y por último 3 grupos de 5 globos, dándole por resultado el número de globos que debía comprar.

5.2.2. Entrevista alumno 12

Los criterios para entrevistar al alumno 12, fueron que este alumno utilizó tres estrategias distintas en la resolución de las tareas. En la tarea 1 dio una respuesta directa, en la tarea 2 utilizó grupos de 3 elementos y en la tarea 3 utilizó expresiones simbólicas ayudándose de operaciones. En la tabla 5.7 presentamos la información relativa al alumno 12 en la prueba escrita.

Tabla 5.7. Resultados prueba escrita alumno 12

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
Tarea 1									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Simbólico							Verbal	
Estrategia	Respuesta directa en relación 1 a 1								
Tarea 2									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Corrección	✓	✓	✓	x	x	x	x		
SR	Pictórico						Verbal		
Estrategia	CGTC			CNNR			RD1-1		
Tarea 3									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Corrección	✓	✓	✓	x	x	x	x		
SR	Simbólico						Verbal		
Estrategia	CGTC			CNNR			RD1-1		

Nota. SR = sistema de representación; CGTC = creación de grupos todos correctos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; RD1-1 = respuesta directa relación 1 a 1.

Relación directa

En la tarea 1 el alumno respondió de forma directa a todos los apartados, y estableció la relación a cada niño un gorro “80 niños, 80 gorros”.

En la tarea 2, el alumno contestó de forma correcta a todos los apartados “haciendo filas” de “tres piruletas”, “para uno son 3 y para otro, otros 3”, en el apartado G estableció la relación 1 a 1, pero en la entrevista estableció la relación “hay que darle 3 para cada uno y luego van llegando más invitados y les vamos dando tres piruletas”.

En la tarea 3, el alumno utilizó la operación suma, y la serie de tantos 5 como niños, aunque se equivocó en la cantidad de 5 cuando el número de niños era más grande, el alumno se dio cuenta de los errores en la entrevista y rectificó verbalmente, diciendo que solo puso los 5 que le alcanzaban “aquí van 20 cincos”, y llegó a la conclusión que para 100 niños debe sumar “pues 100 cincos”.

Relación inversa

En la relación inversa entre número de niños y número de gorros completó rápidamente la relación “para cada uno hay un gorro” y logró la tarea sin dificultad.

Para la relación inversa entre número de niños y número de piruletas, “un niño, 3 piruletas”, el alumno utilizó las series “ahora de revés” donde va agrupando conjuntos de 3 piruletas y los asoció con una carita de niño “3 piruletas para uno”

Para la relación inversa entre número de niños y número de globos, el alumno no quiso trabajar en ella, ya que se encontraba cansado.

Incorporación de un término independiente

En la incorporación de un término independiente el alumno resolvió las actividades propuestas sin mayor dificultad y descubrió la relación número de invitados “...y la corona”.

Relación entre varias variables

Al relacionar todas las variables estudiadas, el alumno nos dio por respuesta 101, que se obtiene de suma todos los niños que están involucrados en todas las tareas de la entrevista, estaba cansada así que no quiso seguir con la actividad propuesta por la investigadora.

5.2.3. Entrevista alumno 15

Los criterios para entrevistar al alumno 15, fueron que este alumno utilizó el sistema de representación pictórica en todas las tareas, logrando contestar de forma correcta la mayor parte de ellas, estableció en la generalización la relación $n+v$ y en el apartado G de la tarea 3 establece una relación de covariación respecto al apartado anterior, “si son 10 niños más, entonces 10 gorros más”, esto lo pudimos apreciar al atender a su consulta en el desarrollo de la prueba escrita y luego lo ratificamos en la entrevista. En la tabla 5.8 recogemos los resultados del alumno 15 en la prueba escrita.

Tabla 5.8. Resultados prueba escrita alumno 15

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
	Tarea 1								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Pictórico y simbólico							Verbal	
Estrategia	Respuesta directa en relación 1 a 1								

Tabla 5.8. Resultados prueba escrita alumno 15

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Tarea 2								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	x	✓	x	x	
SR	Pictórico y simbólico						Verbal	
Estrategia	CD1-3		CDSR		CD1-3	CDSR	n+3	
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	
SR	Pictórico y simbólico						Verbal	
Estrategia	Conteo de dibujos relación 1 a 5					OE	n+5	

Nota. SR = sistemas de representación; CDSR = conteo de dibujos sin relación, CD1-3 = conteo de dibujos relación 1 a 3, OE = otra estrategia.

Relación directa

La tarea 1 fue respondida completamente por el alumno y en forma correcta estableciendo la relación “20 niños, entonces 20 gorros”, en la entrevista estableció la relación “si sé que a un niño un gorro, pues entonces en todos es lo mismo”.

En la tarea 2 el alumno contestó de forma correcta los apartados A, B, C y E en el apartado D y F dibuja un número erróneo de piruletas al cual no le encontramos relación aparente, en el apartado G, siguió la relación $n+3$, en la entrevista el alumno verbalizó la relación “uno se lleva 3 y otro se lleva otros 3 y lo mismo con los otros”, “hay que darle a cada uno 3 piruletas” y se dio cuenta que había valores que no correspondían en sus respuestas en la prueba escrita.

En la tarea 3 el alumno contestó correctamente los apartados A, B, C, D, E, pero en el apartado F, cometió un error de asociación lo que lo llevó a un resultado erróneo, en el apartado G utilizó la relación $n+5$, en la entrevista evidenció la relación “porque $5+5$ son 10” “y para 3 niños como para dos son 10 entonces 5 más y son 15”, “y darle 5 a cada niño”.

Relación inversa

En la relación inversa entre número de niños y número de gorros, el alumno obtuvo rápidamente la respuesta relacionando “si tenemos un niño, un gorro”.

En la relación inversa entre número de niños y número de piruletas, el alumno completó de forma correcta los apartados de esta tarea, evidenció verbalmente lo que hacía, “es

como el otro de las piruletas”, “pongo en un grupo tres piruletas y cuento los grupos y sé cuántos niños son”.

En la relación inversa entre número de niños y número de globos, el alumno completó correctamente todos los apartados de la tarea, expresó de forma verbal la relación “lo mismo que en el de las piruletas” el alumno formó grupos de 5 elementos y contó los grupos que obtuvo lo que es igual al número de niños involucrados en el problema.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no representó mayor dificultad en este alumno, encontrando la relación funcional $n+1$ “con la corona es uno más” y completando todos los apartados propuestos de forma correcta.

Relación entre varias variables

Cuando se le pide relacionar todas las variables estudiadas, el alumno contestó que son 9 en cada variable, luego de un pequeño análisis, parte con 9 fichas de piruletas y se le recordó que debía respetar las relaciones que ya se habían establecido, el alumno hizo entonces grupos de 3 piruletas, obteniendo el número de niños involucrados en el problema, luego relacionó “si hay 3 niños, hay 3 gorros”, con los globos en un principio dice “5 globos un niño” pero igualmente contestó de forma incorrecta.

5.2.4. Entrevista alumno 27

Los criterios para entrevistar al alumno 27, fueron que este alumno utilizó expresiones como “más”, lo que fue considerado en la prueba escrita como otra categoría, en varios apartados de diferentes tareas dibujó v elementos, específicamente queríamos ahondar en que significaba para el alumno la expresión “más”. Presentamos la información relativa al trabajo del alumno 27 a la prueba escrita en la tabla 5.9.

Tabla 5.9. Resultados prueba escrita alumno 27

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H	
Tarea 1									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
SR	Pictórico							Verbal	
Estrategia	Conteo de dibujos en relación 1 a 1								
Tarea 2									
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		

Tabla 5.9. Resultados prueba escrita alumno 27

Apartados	A	B	C	D	E	F	G	H
Corrección	x	x	x	x	x	x	x	
SR			Pictórico				Verbal	
Estrategia	CGTC		Conteo de dibujos relación 1 a 1				RD1-1	
Tarea 3								
Responden	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
Corrección	x	x	x	x	x	x	x	
SR			Pictórico y simbólico				Verbal	
Estrategia	OE (dibuja 5 globos y la palabra “más”)						RD1-1	

Nota. SR = sistema de representación; RD1-1 = respuesta directa relación 1 a 1. CGTC = creación de grupos todos correctos.

Relación directa

En la tarea 1 el alumno respondió correctamente a todos los apartados, en la entrevista evidenció la relación funcional entre las variables, “vi a los niños”, “50 niños 50 gorros, si no algún niño queda sin gorro”.

En la tarea 2, el alumno solo dibujó 3 piruletas en cada uno de los apartados A y B, luego dibujó tantas piruletas como niños, en la entrevista se le pidió que explicara que trató de decir en los apartados A y B al dibujar esas 3 piruletas, pero contesta “no me acuerdo”, se le entrega material concreto y establece la relación “a cada niño le doy 3 piruletas”.

En la tarea 3 la alumna dibujó en todos los apartados 5 globos y escribió la palabra “más”, en la entrevista se le pide que explique lo que hizo en esta tarea, aunque no contestó específicamente lo que se le preguntaba, luego de establecer varias situaciones erradas y de analizar la situación llegó a la relación “5 globos para cada niño”.

Relación inversa

En la relación inversa entre el número de niños y número de gorros, el alumno contestó de forma correcta a la tarea, aunque no fue capaz de dar una respuesta que complementara el valor numérico que entregaba.

En la relación inversa entre número de piruletas y número de niños, el alumno estableció la relación 1 a 1, al igual que en la relación entre globos y niños.

Incorporación de un término independiente

La incorporación de un término independiente no le complicó en lo absoluto y respondió sin error el número de gorros y coronas que se necesitan, no estableció una relación clara de funcionalidad, pero si responde al número de invitados "...y una corona".

Relación entre varias variables

Cuando el alumno se vio enfrentado a una tabla con todas las variables que se habían estudiado, estableció como relación que en todos van la misma cantidad que de piruletas.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones obtenidas tras la realización de nuestra investigación.

Con este trabajo hemos querido recoger información útil, que complementen las investigaciones que se están realizando en torno al *early algebra* y específicamente, a su enfoque de pensamiento funcional en edades tempranas. Estas investigaciones, como hemos puesto de manifiesto en los capítulos anteriores, son escasas a nivel internacional y en España son inexistentes. Nuestro principal antecedente en España es el TFM de Merino (2012) y de algunas publicaciones derivadas de este trabajo. Esta investigación resulta innovadora porque contribuye a una línea de actualidad y que a nivel nacional ha recibido poco tratamiento, siendo nulo para alumnos de primero de educación primaria, con los que trabajamos en este estudio. De ahí lo novedoso de este trabajo, en el que nos hemos planteado como objetivo general: *Describir el pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria en España.*

Comenzamos el capítulo por una valoración de la consecución de los objetivos, tanto general como específicos, planteados en el capítulo 3 de este trabajo. A continuación, describimos las limitaciones que hemos identificado en nuestro trabajo y las líneas de investigación abiertas para futuros trabajos.

6.1. Consecución de los objetivos de investigación

Con el fin de cumplir con el objetivo general de la investigación, lo desglosamos en tres objetivos específicos. A continuación describimos el logro de los mismos.

Para dar respuesta a los objetivos de investigación, hemos analizado las producciones escritas de un grupo de 32 alumnos de primero de educación primaria, con edades comprendidas entre los 6 y 7 años, en la realización de tareas que abordan el pensamiento funcional (relación directa); y de las entrevistas semiestructuradas (relación directa y relación inversa) a 4 alumnos, incorporando además un término independiente y la relación entre varias variables.

Como primer objetivo específico, nos planteamos: *Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos en tareas que involucran una relación funcional lineal*

directa entre dos variables, prestando especial atención a los diferentes tipos de patrones que utilizan. Este objetivo específico, según nuestra apreciación, fue cumplido, ya que identificamos las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de cada una de las tareas propuestas, y las describimos en detalle. Identificamos cada una de las relaciones que los alumnos utilizaron en la resolución de cada uno de los apartados de las tareas. Creando una nueva categorización para este tipo de tareas.

En cuanto a las estrategias que identificamos y describimos, nos encontramos con que muchos de ellos establecieron la relación correcta (1 a v), por lo menos en los casos particulares consecutivos, y que seguían esta estrategia para los no consecutivos, por lo que lo describimos como “cambia el número de niños de la relación” y que utilizaron la conformación de grupos para que los dibujos tuvieran un orden y fuese más fácil contarlos. También hubo varios alumnos que se quedaron con la primera tarea y establecieron la relación identidad (1 a 1) en todas las tareas que le seguían, llevándolos a respuestas erróneas, esto se hacía más evidente en los casos no consecutivos y en la generalización. Encontramos alumnos que para valores de la variable independiente mayores, establecieron la relación $n+v$, los cuales tenían la noción que esa relación con la unidad era importante y había que incluirla en algún momento de la resolución de las tareas. Hubo un número menor de alumnos que utilizaron la relación de la unidad como constante, escribiendo o dibujando solo v elementos.

Como segundo objetivo específico, nos planteamos: *Identificar y describir estrategias utilizadas por alumnos en tareas que involucran una relación funcional inversa, una función lineal con término independiente y una relación funcional lineal entre varias variables.* Este objetivo específico lo logramos con las entrevistas personales, en ellas evidenciamos concretamente las relaciones que los alumnos establecieron, ya que la entrevista permite indagar en las resoluciones de las tareas propuestas y en el pensamiento funcional que el alumno utiliza.

Como tercer objetivo específico, nos planteamos: *Describir los sistemas de representación que los alumnos utilizan en la resolución de las tareas sobre las funciones propuestas.* Este objetivo específico, también fue logrado. Y detallamos lo que encontramos en las producciones escritas de los alumnos.

El sistema de representación más frecuentemente utilizado por los alumnos fue el pictórico. Los alumnos tendieron a dibujar los casos particulares por los que se les preguntaba en cada apartado. A partir del dibujo, utilizaban el sistema de representación simbólico (a través de números) para dar respuesta a las preguntas planteadas. Dentro de este sistema de representación, hubo alumnos que llegaron a la expresión numérica final mediante el conteo o mediante la expresión de operaciones entre números que iban anotando. Además hubo alumnos que utilizaron el sistema de representación verbal, a través del cual explicaron su respuesta. Además de las dificultades que pudieron encontrar los alumnos en la explicación de sus producciones escritas, encontramos que, su vocabulario era muy pobre y en ocasiones, esto dificultaba su explicación. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta su edad y que la mayoría de ellos eran lectores principiantes.

Estos objetivos específicos nos ayudan a concretar el objetivo general descrito al inicio de este capítulo, pudimos evidenciar que algunos alumnos establecieron relaciones funcionales entre las variables. El apartado sobre la generalización introducido en las tareas ha ayudado a establecer evidencias concretas en alguna de las frases que utilizaban para explicarle a la mamá de Lola como determinar la cantidad de elementos que necesitaba en general. Las entrevistas ayudaron a complementar la información y destacamos las relaciones funcionales entre las variables que los alumnos de educación primaria son capaces de identificar. También evidenciamos en las entrevistas la utilización de grupos, ya que utilizaban los dedos para generar los grupos de v elementos y en la prueba escrita solo nos daban una respuesta directa. El material concreto introducido por la entrevistadora ayudó a los alumnos a organizar la información que poseían para solucionar el problema.

Al comparar nuestros resultados con los resultados de las investigaciones citadas en este trabajo son similares, considerando la edad de los alumnos y el tipo de investigación realizada, con lo que damos por cumplido el objetivo general y los objetivos específicos propuestos para esta investigación.

6.2. Limitaciones de la investigación

Una de las limitaciones de esta investigación es la instrucción, por lo que debería ser una investigación de diseño, como la mayoría de las investigaciones que encontramos publicadas en torno a este tema.

Por tiempo y espacio disponible para el Trabajo Fin de Máster, realizamos 4 entrevistas. Habría sido interesante entrevistar a más alumnos para obtener información más rica sobre el trabajo que llevaron a cabo, pues sus explicaciones escritas eran escasas en algunos casos.

El que los alumnos fueran en su mayoría lectores principiantes, hizo que no fueran ágiles en dar explicaciones por escrito. Esto supone una limitación en las producciones de los estudiantes. Tratamos de adaptar la recogida de información en la medida de las posibilidades.

6.3. Líneas de investigación abiertas

La introducción del álgebra en educación infantil o educación primaria es un tema de actualidad, más aún, en el pensamiento funcional en edades tempranas, por lo que hay mucho que investigar en este campo. A partir del trabajo realizado, presentamos algunos ejemplos de líneas de continuación en esta investigación.

Trabajar un análisis individual de todas las tareas y apartados desarrollados por cada uno de los alumnos, ya que nosotros analizamos cada uno de los apartados e hicimos un análisis de cada tarea en general.

Trabajar un análisis general de los resultados comparando las actuaciones en conjunto de todas las tareas y apartados.

Analizar por separado los instrumentos y forma de recogida de datos, ya que solo la prueba escrita nos entrega información que puede ser digna de análisis.

Las entrevistas pueden ser consideradas como casos únicos, lo cual también nos lleva a un largo análisis del comportamiento de cada uno de los alumnos entrevistados.

Desde el punto de vista de la investigadora, sería interesante replicar esta investigación en Chile, comparar los resultados que se obtienen con los de esta investigación.

En este trabajo hemos trabajado el pensamiento funcional en el primer curso de educación primaria, queda pendiente indagar sobre el caso de los alumnos de educación infantil. Al ampliar la muestra a otros cursos, podríamos llevar a cabo un estudio longitudinal, viendo cómo son los avances de los alumnos en diferentes cursos en lo relativo a pensamiento funcional. Como parte de esta línea de investigación se podría introducir el diseño de unidades didácticas y la introducción de experimentos de enseñanza que los lleven a avanzar en los conocimientos algebraicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. En M. Jonsen Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 135-142). Bergen, Noruega.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Brizuela, B., Carraher, D. y Schliemann, A. (2000). Mathematical notation to support and further reasoning (“to help me think of something”). *Symposium presentation, 2000 NCTM Research Pre-session Meeting, Chicago, IL.*
- Brizuela, B. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 309-319.
- Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. (2014) Children’s use of variable notation to represent their algebraic ideas. Manuscrito enviado para publicación.
- Butto, M. y Rojano, M. (2009). *Pensamiento algebraico temprano*. X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Área 5: Educación y conocimientos disciplinares. Veracruz, México.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/282/>
- Cañadas, M. C, Brizuela, B. y Blanton, M. (en revisión), Second graders articulating ideas about co-variation with linear functions.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.

- Cañadas, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada, España: Comares.
- Castro, E., Cañadas, M C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1). 3-21.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Dpto. de Didáctica de la Matemática de la universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*, 5º edición. México, DF: McGraw Hill.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.
- Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (2009). *Algebra in the Early Grades*. Londres, Reino Unido: Routledge.

- Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.
- Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1926/>
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Ministerio de Educación del Gobierno de Chile (2012). *Decreto 439 de 14 de abril de 2012, por el que se establecen las bases curriculares para la Educación Básica*. Santiago, Chile.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 293, 43053-43102.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5, 677-773.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007c). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de educación infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 4, 474-482.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/544/>
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Moss, J. y London, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-

variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education*. Berlin, Alemania: Heidelberg.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid, España: SXXI.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in mathematics education monograph series* (pp. 303-322). Nueva York, NJ: Springer.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1751/>

Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. Carraher, D. Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. *Enseignement de l'algèbre élémentaire, volume especial, Recherches en Didactique des Mathématiques*, 107-122

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 77, 5-34.
- Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal*. México, DF: Reverté.
- Thomas, G. (2006). *Cálculo. Una variable*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson Adisson Wesley.
- Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Warren, E. (2003). Young children's understanding of equals: A longitudinal study. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 4, pp. 379-387). Honolulu, Hawai: College of Education, University of Hawai.