



TRABAJO FIN DE MÁSTER UNIDAD DIDÁCTICA: FRACCIONES

**Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.**

Especialidad: Matemáticas.

Alumna: GLORIA LEÓN ROBLES

Curso: 2010/2011



Universidad de Granada

UNIDAD DIDÁCTICA: FRACCIONES

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Gloria León Robles, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Gloria León Robles

VºBº del Tutor

Fdo: Jose Luis Lupiáñez Gómez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
2. PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	2
3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LAS FRACCIONES	4
3.1. UBICACIÓN EN EL CURRÍCULUM	4
3.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS FRACCIONES	6
3.3. ¿CÓMO SURGEN LAS FRACCIONES?	8
3.4. ¿QUÉ TIPOS DE FRACCIONES SE PUEDEN ENCONTRAR?	8
3.5. ¿ES LO MISMO UNA FRACCIÓN QUE UNA RAZÓN?	9
3.6. ¿QUÉ IMPLICA EL HECHO DE RELACIONARSE CON FRACCIONES?	10
3.7. ¿CÓMO SE REPRESENTAN LAS FRACCIONES?	11
3.8. ¿CUÁNDO SE UTILIZAN LAS FRACCIONES?	13
3.9. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE	15
3.10. LIMITACIONES, ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS	20
3.10.1. Dificultades y errores relacionados con la comprensión del significado y uso de las fracciones	20
3.10.2. Dificultades y errores relacionados con la estructura aditiva de las fracciones	22
3.10.3. Dificultades y errores relacionados con la estructura multiplicativa de las fracciones	22
4. DESCRIPCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	24
4.1. METODOLOGÍA A SEGUIR	24
4.2. NIVELES DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS ESCOLARES	24
4.3. MATERIALES Y RECURSOS	25
4.4. SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	26
5. EVALUACIÓN DEL TEMA DE FRACCIONES	45
5.1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN	45
5.2. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	45
5.3. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN	46
6. ESTUDIO EMPÍRICO CON ESCOLARES DE 1º Y 2º DE ESO: FRACCIONAR Y REPARTIR	47
6.1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	47
6.2. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO	48
6.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS	49
6.4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EMPÍRICO	56
7. CONCLUSIONES	57
8. BIBLIOGRAFÍA	59

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las fracciones como Unidad Didáctica se va a llevar a cabo como Trabajo Final en el marco del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Granada. El interés que despierta en mí este tema se debe a que es una materia cuya importancia queda más que demostrada por el hecho de que se comienza a impartir durante la Educación Primaria prolongándose durante los cuatro años que dura la Educación Secundaria, y que, sin embargo, a pesar de todo el tiempo que se le dedica, sigue generando confusión y rechazo por parte de los estudiantes. Es por ello que me gustaría tratar de presentar una propuesta que consiga motivar a los alumnos y que despierte en ellos el gusto y la curiosidad por el mundo de las Matemáticas.

Tal y como queda reflejado en la LOE, es fundamental que las programaciones didácticas de los centros se rijan siguiendo los principios básicos de calidad y equidad, puesto que son éstos los fines principales de la educación. Además, entre sus objetivos se encuentran también la transmisión y puesta en práctica de valores que favorezcan la libertad personal, las responsabilidades, la ciudadanía democrática, la solidaridad, la tolerancia, la igualdad, el respeto y la justicia, así como que ayuden a superar cualquier tipo de discriminación. Para completar todo esto, la ley también establece que se debe buscar el esfuerzo individual y compartido de los alumnos, así como su motivación.

Como ya se ha indicado, en este Trabajo Fin de Máster se presenta una propuesta de Unidad Didáctica acerca de las Fracciones dirigida a los alumnos de 1º de ESO. Estos alumnos se caracterizan por estar en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, siendo, por lo general, el primer año que se encuentran en su Centro actual. Se trata, por tanto, de un curso de suma importancia ya que es muy posible que la motivación, rendimiento, valores, experiencias, etc. que vivan a lo largo de este curso determinen en gran medida su perspectiva y modo de entender y de vivir el resto de cursos de esta etapa educativa.

Por tanto, habrá que trabajar para lograr esa motivación que dé lugar a un interés y a un esfuerzo por parte del alumno que a su vez permita que éste coseche y obtenga unos resultados satisfactorios tanto a nivel académico como personal. En este ámbito, se debe de tener siempre presente en el aula la importancia de las Matemáticas como elemento de la cultura, buscando aplicaciones de las fracciones en la vida cotidiana así como materiales y formas de enseñanza novedosas que capten la atención de los escolares. Un elemento muy importante va a ser el empleo de herramientas tecnológicas, instrumentos indispensables y necesarios en la sociedad actual, pero siempre y cuando su uso se lleve a cabo desde un punto de vista crítico y meditado y no simplemente por el hecho de estar disponibles.

Esta propuesta de Unidad Didáctica se estructura en siete apartados. El primero contempla la justificación de la misma desde la investigación. En el segundo apartado se lleva a cabo el análisis didáctico; aquí se recoge la ubicación en el currículum, evolución histórica, cómo surgen, qué tipos hay, cómo nos relacionamos con ellas, cómo se representan, cuándo se utilizan, cuáles son las expectativas de aprendizaje y finalmente, cuáles son las limitaciones, errores y dificultades de los alumnos. En el siguiente apartado se aborda la descripción de la Unidad Didáctica, indicado, entre otros, la metodología a seguir y la secuenciación y organización de las tareas. En un apartado posterior se habla de la evaluación, indicando los criterios e instrumentos que se van a emplear. Visto esto, el quinto apartado recoge los resultados de un estudio empírico llevado a cabo con alumnos de 1º y 2º de ESO y, finalmente, en los últimos dos apartados se recogen las conclusiones así como la bibliografía consultada.

2. PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El análisis didáctico, como una herramienta para el diseño de unidades didácticas, se articula en torno a los organizadores del currículo.

Un currículo es una propuesta de actuación educativa, que en el caso de las matemáticas, puede considerarse como un “plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos que tiene lugar en el sistema educativo de un país” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 34). Como elemento que relaciona la organización y legislación educativas con la actividad docente del profesor, un currículo, como plan formativo, ha de atender a cuatro cuestiones centrales (Rico, 1997):

1. ¿Qué formación? ¿Con cuál conocimiento?
2. Esa formación, ¿para qué? ¿Qué aprendizaje persigue?
3. ¿Cómo llevar a cabo la formación?
4. ¿Cuánta fue la formación? ¿Qué resultados se obtuvieron?

Rico (1997) detalla esas cuatro cuestiones y justifica cómo delimitan cuatro dimensiones que permiten llevar a cabo una reflexión y organización curricular. Estas dimensiones, interconectadas entre sí, son la dimensión cultural y conceptual, la dimensión cognitiva, la dimensión ética o formativa y la dimensión social.

Tal y como establece Lupiáñez (2009), si nos situamos en el nivel de planificación del profesor, las componentes en las que se concreta el currículo en cada una de sus dimensiones son los contenidos, los objetivos, la metodología y la evaluación. Estas son las cuatro componentes tradicionales del currículo que debe manejar el profesor; el modelo de los organizadores del currículo le suministra una serie de herramientas con las que abordar el estudio de esas cuatro componentes del currículo de cara al diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje.

El análisis didáctico introduce un nuevo nivel de reflexión curricular, centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de temas de la matemática escolar y que, en correspondencia con las cuatro dimensiones del currículo, propone cuatro componentes: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*. Los tres primeros análisis se ocupan del diseño, mientras que el análisis de actuación se centra en la puesta en práctica, implementación y la posterior evaluación de los resultados obtenidos.

1. En el análisis de contenido, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción.
2. El análisis cognitivo, ubicado en la dimensión cognitiva del currículo, aborda la problemática del aprendizaje de ese tema matemático por parte de los escolares.
3. En el análisis de instrucción, el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que empleará en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente. También analiza los diferentes materiales y recursos que podrá emplear en sus clases y delimita los criterios y los instrumentos de evaluación.
4. El último de los análisis, el de actuación, se lleva a cabo después de implementar la unidad didáctica y le sirve al profesor para recabar información acerca de: la medida en que se

han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas o la bondad de las herramientas de evaluación puestas en juego. Esta información es útil de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

Y volviendo al currículo, las recientes orientaciones y directrices curriculares basadas en los informes PISA han retomado la visión funcional de las matemáticas:

“El desarrollo de la competencia matemática (...) supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad”. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31689).

Por lo tanto, desde el punto de vista de la actividad docente del profesor, este enfoque funcional del currículo requiere de un diseño cuidado y detallado de las matemáticas escolares de cara al aprendizaje de los escolares; sobre todo porque, a diferencia de otros enfoques, no toma como hilo conductor de la planificación la secuencia tradicional o lógica del propio contenido. Lupiáñez (2009).

Finalmente, a continuación se va a llevar a cabo el Análisis Didáctico del tema de Fracciones del curso de 1º de ESO, análisis que se apoya en los trabajos de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009).

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LAS FRACCIONES

En el presente capítulo se va a llevar a cabo el análisis didáctico de las Fracciones. Se comenzará hablando de su ubicación en el currículum y cuál ha sido su evolución histórica para pasar posteriormente a responder una serie de preguntas: cómo surgen, qué tipos hay, qué implica el hecho de relacionarse con fracciones, cómo se representan y cuándo se utilizan. Finalmente, se tratarán cuáles son las expectativas de aprendizaje y cuáles son las limitaciones, errores y dificultades que pueden encontrar los alumnos.

3.1. UBICACIÓN EN EL CURRÍCULUM

Los contenidos relacionados con el tema de las Fracciones quedan recogidos en documentos de diversa índole, los cuales se mencionan a continuación:

Tal y como establece el **RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria**:

En su intento de comprender el mundo todas las civilizaciones han creado y desarrollado herramientas matemáticas: el cálculo, la medida y el estudio de relaciones entre formas y cantidades han servido a los científicos de todas las épocas para generar modelos de la realidad.

Por ello, los contenidos matemáticos seleccionados para la etapa de educación secundaria obligatoria están orientados a conseguir que todos los alumnos puedan alcanzar los objetivos propuestos y estén preparados para incorporarse a la vida adulta.

Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. La consolidación de los contenidos considerados complejos se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión con nuevos contenidos.

Dentro de los cinco bloques en que se divide el contenido matemático (Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad), las Fracciones se encuentran incluidas en el Bloque 2: Números. El desarrollo del sentido numérico iniciado en educación primaria continúa en educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes.

Por otra parte, en la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

Aunque este trabajo se va a centrar la Unidad Didáctica que se imparte en el curso de 1º de ESO, se quiere reflejar la importancia de las Fracciones dentro del mundo de las matemáticas así como su aplicación a la vida real en el hecho de que es una materia que aparece en todos los niveles que se imparten durante la Educación Secundaria Obligatoria, tal y como se puede observar a continuación:

Primer Curso. Bloque 2 (Números):

1. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.
2. Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales.

Segundo Curso. Bloque 2 (Números):

1. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.

Tercer Curso. Bloque 2 (Números):

1. Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.
2. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada.

Cuarto Curso. Opción B. Bloque 2 (Números):

1. Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.

Por otra parte, los contenidos referentes a las fracciones recogidos en el anterior Real Decreto son ampliados para los cursos de 1º y 3º de la ESO en la **ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria:**

Primer Curso. Bloque 2 (Números):

1. Diferentes significados y usos de las fracciones en la vida real.
2. Simplificación y amplificación de fracciones; identificación y obtención de fracciones equivalentes.
3. Reducción de fracciones a común denominador. Comparación de fracciones.
4. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.
5. Relaciones entre fracciones y decimales.

Tercer Curso. Bloque 2 (Números):

1. Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa.
2. Operaciones con fracciones y decimales.
3. Fracciones equivalentes. Números racionales.
4. Comparación de números racionales y decimales.
5. Representación en la recta numérica de los números racionales; utilidad para comparar y ordenar fracciones y decimales.

Finalmente, el tema objeto de este estudio también queda recogido en la **Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.**

Dicha Orden, en el contexto de desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática establece que el conocimiento de los números, iniciado en la educación primaria, y su aplicación práctica a las distintas situaciones que se presentan en la vida cotidiana continúa en la educación secundaria obligatoria con la ampliación de los conjuntos numéricos que se utilizan,

como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes, así como el de números irracionales en el caso de la opción B de las matemáticas de 4.º curso.

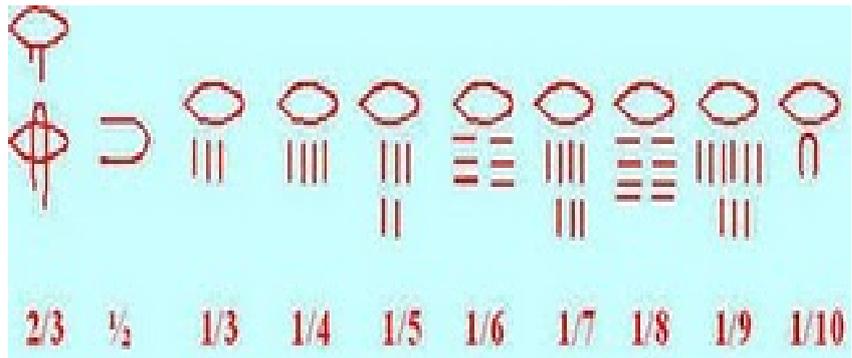
El desarrollo del sentido numérico será entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas, que se pueden expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar estimaciones, cálculos mentales y razonados. Pero más importante que el ejercicio de destrezas basadas en cálculos descontextualizados, es relacionar las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones y comprender las propiedades de cada conjunto de números para poder realizar un uso razonable de las mismas.

3.2. EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS FRACCIONES

El origen de las fracciones. En la historia es posible distinguir dos motivos principales por los que fueron inventadas las fracciones. El primero de ellos fue la existencia de divisiones inexactas mientras que el segundo resultó de la aplicación de unidades de medida de longitud.

Las fracciones, también conocidas con el nombre de “quebrados”, ya eran conocidas por babilonios, egipcios y griegos. Pero el nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética de Al-Juarizmi. De Luna empleó la palabra «fractio» para traducir la palabra árabe «al-Kasr», que significa quebrar, romper.

Se considera que fueron los **egipcios** quienes utilizaron por primera vez las fracciones, pero sólo aquellas de la forma $1/n$ o las que pueden obtenerse como combinación de ellas. Es decir, Los egipcios utilizaron las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4,..., y las fracciones $2/3$ y $3/4$ consiguiendo hacer cálculos fraccionarios de todo tipo.



Los egipcios resolvían problemas de la vida diaria mediante operaciones con fracciones. Entre ellas estaban la distribución del pan, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta Tierra. Esto lo podemos comprobar en numerosas inscripciones antiguas como el papiro de Ahmes.



El Papiro de Ahmes o Papiro Rhind es un documento escrito en un papiro de unos seis metros de longitud y 33 cm de anchura, en un buen estado de conservación, con escritura hierática y contenidos matemáticos. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en 1650 a. C., a partir de escritos de doscientos años de antigüedad, según reivindica Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores. Contiene 87 problemas matemáticos

con cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. En él encontramos el tratamiento de las fracciones.

Básicamente, la fracción surge en un contexto de medida y en otro de reparto.

Sin embargo, en el siglo VI d. C, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones.

En el sistema sexagesimal empleado por los matemáticos sumerios y de **Babilonia** se hizo uso también de las fracciones, los cuales las utilizaron teniendo como único denominador al número 60. Desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionaria, que permitió establecer aproximaciones decimales realmente sorprendentes.

1	∟	11	∟∟	21	∟∟∟	31	∟∟∟∟	41	∟∟∟∟∟	51	∟∟∟∟∟∟
2	∟∟	12	∟∟∟	22	∟∟∟∟	32	∟∟∟∟∟	42	∟∟∟∟∟∟	52	∟∟∟∟∟∟∟
3	∟∟∟	13	∟∟∟∟	23	∟∟∟∟∟	33	∟∟∟∟∟∟	43	∟∟∟∟∟∟∟	53	∟∟∟∟∟∟∟∟
4	∟∟∟∟	14	∟∟∟∟∟	24	∟∟∟∟∟∟	34	∟∟∟∟∟∟∟	44	∟∟∟∟∟∟∟∟	54	∟∟∟∟∟∟∟∟∟
5	∟∟∟∟∟	15	∟∟∟∟∟∟	25	∟∟∟∟∟∟∟	35	∟∟∟∟∟∟∟∟	45	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	55	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
6	∟∟∟∟∟∟	16	∟∟∟∟∟∟∟	26	∟∟∟∟∟∟∟∟	36	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	46	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	56	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
7	∟∟∟∟∟∟∟	17	∟∟∟∟∟∟∟∟	27	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	37	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	47	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	57	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
8	∟∟∟∟∟∟∟∟	18	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	28	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	38	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	48	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	58	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
9	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	19	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	29	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	39	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	49	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	59	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
10	∟∟	20	∟∟∟	30	∟∟∟∟	40	∟∟∟∟∟	50	∟∟∟∟∟∟		



Esta evolución y simplificación del método fraccionario permitió el desarrollo de nuevas operaciones que ayudaron a la comunidad matemática de siglos posteriores a hacer buenos cálculos de, por ejemplo, las raíces cuadradas.

Para los babilónicos era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando su sistema de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

Por último, en **china antigua** se destaca el hecho de que en la división de fracciones se exige la previa reducción de éstas a común denominador.

El libro "*Chóu-pei*" (de autor desconocido) fue escrito probablemente sobre el año 1105 a.C. y contiene varios problemas que involucran al número $247 \frac{933}{1460}$. El trabajo incluye divisiones como la de 119 por $182 \frac{5}{8}$, en las que previamente se multiplicaba por 8.

Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones. . Algunas veces se adoptaron ciertas artimañas de carácter decimal para aligerar un poco la manipulación de las fracciones.

Los **griegos**, por su parte, trabajaban con un sistema de numeración alfabético, introduciendo así fracciones con números distintos de la unidad en el numerador, valiéndose para ello de letras. Para los griegos, los números fraccionarios estaban asociados a longitudes y efectuaban cálculos con fracciones bastante complicados

De su primera época destacamos la tradición que atribuye a Pitágoras el descubrimiento de las proporciones que se dan entre los sonidos armónicos

Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) utiliza la fracción $\frac{10}{71}$ en su aproximación del número π y Diofanto de Alejandría (S II d.C.) comienza a usar una notación menos ambigua de fracción en la que pone al denominador como exponente del numerador.

Se puede decir, además, que los griegos mostraron sus grandes dotes en cuanto a geometría en algunas construcciones geométricas de segmentos cuyas longitudes representan racionales.

De época más tardía es Euclides –fines del siglo IV a.c.- en cuyo texto fundamental “Elementos de Geometría” y sus Libros VII y VIII da una definición de fracción y hace un estudio extenso de las propiedades más importantes de las fracciones estudiadas como razones.

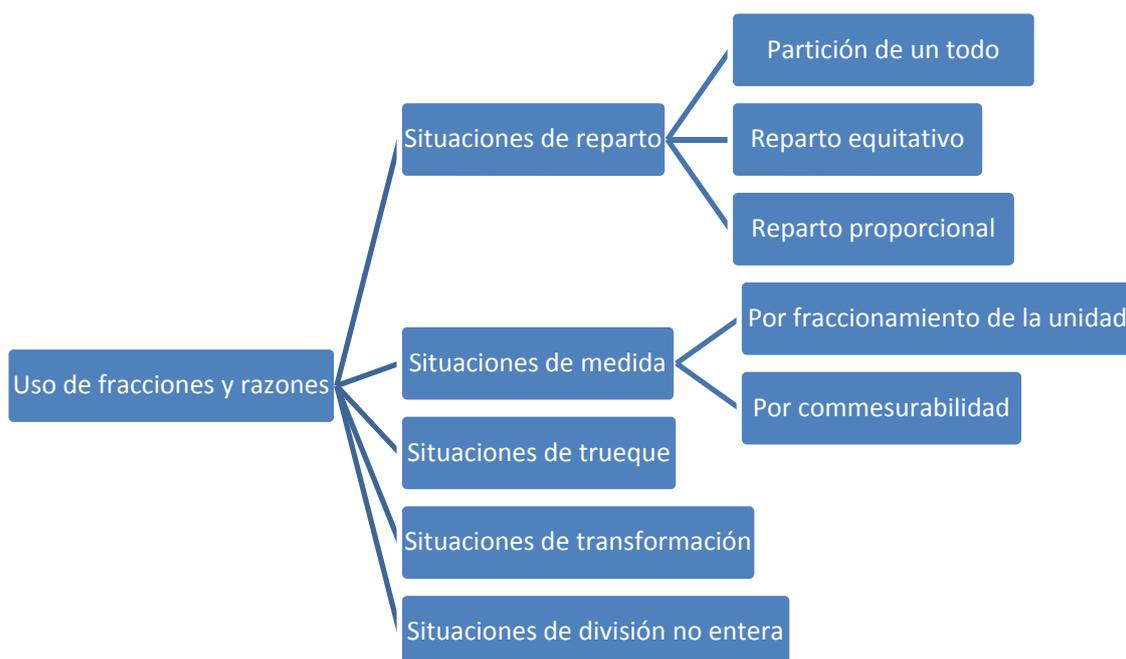
Entre las aportaciones de los matemáticos **árabes** a la cultura matemática occidental de la Baja Edad Media está la introducción del Sistema de Numeración Indoarábigo, el que básicamente dio origen al actual y en particular el empleo de estos números para expresar fracciones con una notación similar a la actual: numerador encima del denominador pero sin raya de fracción; esta notación fue tomada de los hindúes de los cuales existen datos del siglo VI sobre su empleo (Brahamagupta). La cultura árabe continúa la tradición griega de descomposición de unidades fraccionarias.

3.3. ¿CÓMO SURGEN LAS FRACCIONES?

Nos encontramos con frecuencia situaciones en las que es preciso dividir un todo en partes, repartir un conjunto de objetos en partes iguales o medir una cierta cantidad de una magnitud que no es múltiplo de la unidad de medida. Para resolver estas situaciones prácticas, tenemos necesidad de expresar el cociente de dos números naturales (en los casos en que no es un número natural). Ello nos lleva a la idea de fracción y tras un proceso de abstracción a la introducción de los números racionales.

3.4. ¿QUÉ TIPOS DE FRACCIONES SE PUEDEN ENCONTRAR?

En la vida cotidiana, podemos aproximarnos al concepto de fracción de muy diversas formas. De entre los diversos estudios que se han llevado a cabo, una de las posibles clasificaciones es la que se muestra en el siguiente esquema:



Entre las **Situaciones de Reparto**, tal y como se aprecia en el esquema, podemos encontrarnos ante tres situaciones diferentes:

1. Partición de un todo: en este caso, un todo (que puede estar constituido por uno o más objetos) se divide en partes iguales y se toman o consideran algunas de esas partes.
2. Reparto equitativo en las que el número de objetos a repartir no es múltiplo del número de individuos entre los que se efectúa el reparto: Los objetos pueden ser divididos en partes sin que pierdan sus propiedades básicas. En este caso la existencia de un resto obliga a dividir en partes iguales la unidad de reparto para poder seguir repartiendo el resto de forma igualitaria entre los individuos.
3. Reparto proporcional de una cierta cantidad en partes que guardan una cierta relación: en este caso el reparto no es equitativo, sino que cada individuo recibe o contribuye en función de una jerarquía establecida. La relación entre las cantidades repartidas puede ser de tipo aditivo o de tipo multiplicativo según que lo que se mantenga constante sea la diferencia entre las cantidades a repartir o el cociente.

En relación con las **Situaciones de Medida**, se pueden distinguir dos casos:

1. Por fraccionamiento de la unidad: En estas situaciones existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o alguno de sus múltiplos. Para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide a/b unidades quiere decir que dividiendo la unidad en b partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número a de dichas partes.
2. Por conmensurabilidad: Situaciones de medida en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales.

En tercer lugar se aprecian las **Situaciones de Trueque**, en la que los individuos intercambian mercancías. Un trueque se efectúa en la razón $a: b$ si por cada a objetos de un tipo que el primer individuo le entrega al segundo, este último le entrega al primero b objetos de otro tipo.

Posteriormente se encuentran las **Situaciones de Transformación**: en el estudio del cambio de un objeto, un conjunto de objetos o una cantidad de magnitud, cuando se compara un estado actual con otro pasado o futuro también se utilizan fracciones. En este caso la fracción tiene un uso como función u operador que se aplica sobre una cantidad inicial para hallar una cantidad final.

Finalmente, se puede hablar de **Situaciones de División no Entera**: En el contexto algebraico, la solución de la ecuación $a = bx$, con a y b enteros y cuando b no es un divisor de a y distinto de 0, se expresa mediante la fracción a/b , dejando indicado el cociente entre los números a y b .

3.5. ¿ES LO MISMO UNA FRACCIÓN QUE UNA RAZÓN?

A la hora de distinguir entre fracciones y razones, hay que decir que en algunas situaciones el uso que se hace del término razón es más amplio que el de fracción, por lo que algunos autores diferencian entre estos dos términos. Estas situaciones son las siguientes:

1. Cuando se comparan los tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, y no tiene sentido pensar en un conjunto global que los contenga. Por ejemplo cuando se dice que en una ciudad hay 2 automóviles por cada 5 habitantes.
2. Las razones se pueden expresar mediante símbolos diferentes de fracciones: $4:7$, o $4 \rightarrow 7$; el símbolo de la fecha indica bien el aspecto de correspondencia de una razón, como medio de comparar cantidades.
3. Las razones pueden tener un cero como segunda componente. En una bolsa la razón de bolas rojas a verdes puede ser de 10 a 0, si no hay ninguna verde. En las fracciones el denominador siempre debe ser distinto de cero.

3.6. ¿QUÉ IMPLICA EL HECHO DE RELACIONARSE CON FRACCIONES?

Los niños comprenden progresivamente la noción de fracción, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos. Cada tipo de situación proporciona significados específicos que deben irse construyendo progresivamente para poder asimilarlos correctamente.

Por lo tanto, a la hora de interpretar, manipular y establecer relaciones en el ámbito de las fracciones han de desarrollarse una serie de destrezas, razonamientos y estrategias:

Destrezas:

1. Nombrar y escribir fracciones.
2. Comparar fracciones mediante la ordenación, representación gráfica y paso a decimal.
3. Reconocer y generar fracciones equivalentes.
4. Reducir fracciones.
5. Utilización de los algoritmos convencionales de la suma, resta, producto y división con fracciones.
6. Uso de la calculadora u otros instrumentos para la realización de cálculo con fracciones.
7. Representación de fracciones en una recta o en una figura.
8. Uso del paréntesis y la jerarquía de las operaciones.
9. Identificación entre decimales sencillos y fracciones.

Razonamientos:

1. Deductivo: propiedades de las operaciones.
2. Inductivo: regularidades numéricas.
3. Geométrico o gráfico.

Estrategias:

1. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con fracciones sencillas: medios, tercios, cuartos, décimos...
2. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos –hacia adelante y hacia atrás– alternativamente, etc.).
3. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
4. Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.

Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.

5. Uso de la calculadora para representar, comparar y calcular con fracciones.
6. Resolución de problemas.
7. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
8. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con fracciones de igual denominador.

Finalmente, en relación con los **contenidos actitudinales**, destacan:

1. Apreciar la utilidad de los números fraccionarios en la vida cotidiana.
2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza fraccionaria y reconocimiento de la utilidad de las fracciones para representar la cantidad.
3. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
4. Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números fraccionarios.
5. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
6. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
7. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

3.7. ¿CÓMO SE REPRESENTAN LAS FRACCIONES?

El estudio y revisión de los sistemas de representación es una de las componentes del Análisis de Contenido, junto a la Estructura Conceptual y el Análisis Fenomenológico. Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.

En Matemáticas, los conceptos requieren necesariamente algún modo de representación que ha de ser pertinente, es decir, que permita mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad el concepto y sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente. En este sentido, algunos conceptos son polimorfos, es decir, pueden adoptar diversas formas de representación. Tal es el caso del concepto de fracción.

En efecto, existen varios campos o sistemas de representación para el concepto de fracción. A continuación se presentan los distintos campos (verbal, numérico, gráfico y manipulativo) explicando su significado y presentando algunos ejemplos:

Representación numérica:

Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir varias formas de expresar el mismo concepto:

1. Notación usual: $\frac{1}{2}$. En este caso, una fracción se representa por números que están escritos uno sobre otro y que se hallan separados por una línea recta horizontal llamada raya fraccionaria. La fracción está formada por dos términos: el numerador y el denominador. El numerador es el número que está sobre la raya fraccionaria y el denominador es el que está bajo la raya fraccionaria.
2. Decimal: 0.5.

3. Porcentaje: 50%.
4. Sistema sexagesimal (Horario) 12:15:30.
5. Equivalencia: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.
6. Número mixto: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Representación Verbal:

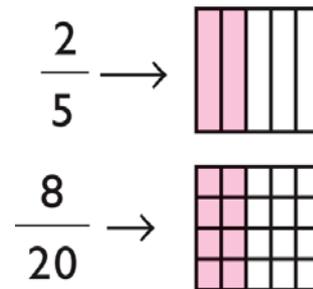
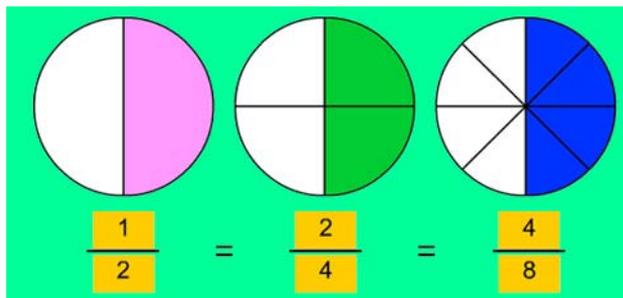
Vinculado al sistema de representación numérico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números racionales, un medio, un tercio, dos quintos... En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar números.

Representación gráfica:

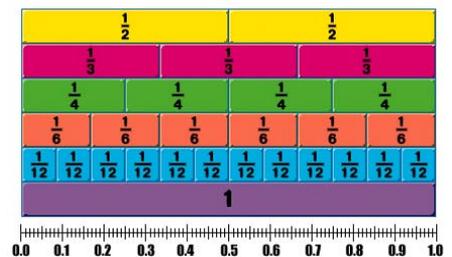
Dentro de este tipo de representación se pueden distinguir dos casos:

Representación gráfica continua:

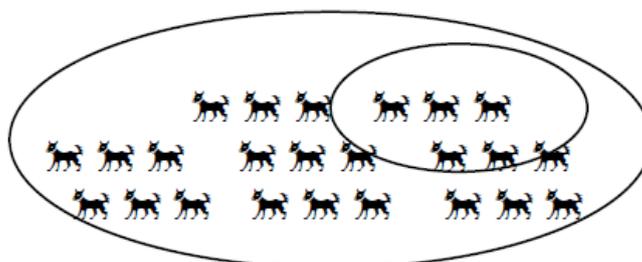
1. Modelos de áreas: Una figura, principalmente rectangular o circular se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada. Este tipo de situaciones de medida o comparación de áreas (con figuras rectangulares o circulares) se pueden utilizar como modelos de otras situaciones de contextos no geométricos.



2. Modelos lineales: Al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.



Representación gráfica discreta: Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.



3.8. ¿CUÁNDO SE UTILIZAN LAS FRACCIONES?

La fenomenología de un objeto matemático es la descripción del objeto con los fenómenos de los cuales emerge o a los cuales subyace: qué fenómenos puede organizar el objeto, a cuáles se extiende, cómo actúa sobre ellos, qué poder nos confiere sobre esos fenómenos...

Un análisis fenomenológico del concepto de fracción demanda, entonces, atender a la pluralidad de significados e interpretaciones que las fracciones admiten y adquieren, según el contexto en que se las emplee. Atendiendo a lo anterior, el concepto de fracción es la síntesis compleja de tales significados e interpretaciones, por lo que, en un primer acercamiento, se pueden reconocer dos dimensiones:

1. Una dimensión dinámica, que hace referencia a acciones como fraccionar (cortar en partes iguales y seleccionar algunas), medir (comprar una dimensión de un objeto con un referente o unidad), comparar o relacionar cantidades y operar.
2. Una dimensión estática, que hace referencia a los productos o resultados de aquellas acciones: la relación entre las partes y el todo fraccionado, la medida, el índice o razón o la tasa de comparación entre cantidades, el resultado de la operación.

No obstante, también hay que aclarar que no se trata de una división clara, sino que en ocasiones se produce un solapamiento entre ambos significados. A continuación se presentan los objetos mentales que representan las fracciones desde una perspectiva fenomenológica, yendo desde los niveles más concretos a los más abstractos:

DIMENSIÓN DINÁMICA	DIMENSIÓN ESTÁTICA
<p>Fraccionar</p> <p>Cortar un objeto en partes iguales y luego repartir algunas de esas partes.</p> <p>Ejemplo: Cortar una tarta en 5 partes y repartir 3 de los trozos</p>	<p>Partes de un todo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Continuo • Discreto
<p>Medir:</p> <p>Comparar la magnitud de una dimensión de un objeto respecto de una magnitud referente.</p> <p>Todo continuo:</p> <p>Determinar el largo de una escoba con una regla.</p> <p>Encontrar la capacidad de un envase de bebida respecto de la capacidad de un vaso de medida.</p> <p>Todo discreto:</p> <p>Elegir objetos o pares de objetos a partir de una colección de los mismos.</p>	<p>Medida:</p> <p>Indica la relación entre una cantidad de partes y la cantidad total de partes.</p> <p>Todo continuo:</p> <p>Medida de longitud</p> <p>Medida de capacidad</p> <p>Todo discreto:</p> <p>De sus 5 coches de juguete, Pablo juega con 3.</p>
<p>Comparar:</p> <p>Comprar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cantidades de una misma magnitud. • Cantidades de distinta magnitud. 	<p>Relación de comparación:</p> <p>Razón: índice comparativo de dos cantidades que puede referirse a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cantidades de una misma magnitud. • Cantidades de distinta magnitud
<p>Operar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar el operador a/b sobre una situación: acción de multiplicar por a una magnitud y luego dividirla por b, o a la inversa. • Dividir. 	<p>Resultado de operar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estado de cosas: resultado de aplicar el operador a/b sobre cantidades. • División indicada/Resultado exacto de una división: es el resultado de dividir una cantidad de un número de partes dadas.

En la didáctica fenomenológica se propone un cambio de enfoque que implica enfrentarse a situaciones cotidianas, en las que es posible y necesario el uso de un conocimiento matemático, creando la condición para que, enfrentándose a una familia de fenómenos, los alumnos y alumnas descubran y construyan mentalmente la relación que tienen en común, es decir, el objeto mental. Sólo así la formulación del concepto matemático puede tener sentido y referencia concreta.

Desde esta visión, el desafío didáctico consiste en crear las condiciones para identificar aquellas familias de fenómenos, vinculados al tema de fracciones, que permitan a alumnos y alumnas construir objetos mentales necesarios y suficientes para comprender tanto los conceptos involucrados como la operatoria y su aplicación práctica.

Ahora bien, hay que tener cuidado en que en el afán de facilitar la comprensión conceptual dé lugar a que el profesor desvincule las fracciones de lo que significa resolver un problema matemático. De hecho, parece que existe consenso entre los especialistas en señalar que, en la enseñanza de la matemática, todo no puede remitirse a lo concreto.

Sin embargo, esto no invalida que, didácticamente, sea necesario ir desarrollando un proceso inductivo, desde la actividad de los alumnos, que permita alcanzar significativamente la dimensión más abstracta de los conceptos matemáticos, tal y como es posible desde la perspectiva fenomenológica.

Este enfoque de enseñanza de la matemática se encuentra entre aquellos cuyo centro es la actividad del alumno. En otro extremo es posible identificar aquellas situaciones cuyo foco es el contenido matemático a ser enseñado.

En base a esto último, los fenómenos sobre los que actúan las fracciones se pueden clasificar según las situaciones que propone el estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas:

Las **situaciones personales** son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. En este tipo de situaciones suele aparecer la fracción como parte de la unidad.

Como ejemplos se pueden encontrar:

1. Rosario y Maribel participan en dos fiestas diferentes, en las cuales se reparten equitativamente sendos pasteles del mismo tamaño. Si el trozo recibido por Rosario es menor que el recibido por Maribel, ¿en cuál de las dos fiestas hubo más invitados?
2. Luis y Juan pesan juntos 105 kgs. Luis pesa $\frac{3}{4}$ de lo que pesa Juan. Hallar el peso de Juan.
3. Cinco amigos consumieron en un restaurante por un total de 40 €, pero dos de ellos sólo consumieron $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{6}$ del total. Por tanto, si los demás consumieron lo mismo entre ellos, ¿cuánto pagó cada uno de los restantes para saldar la deuda?

Las **situaciones laborales** son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. En este tipo de situaciones suele aparecer la fracción como parte de la unidad.

Como ejemplos se proponen:

1. Un sastre compró la mitad de 9 metros de tela y utilizó $4 \frac{1}{2}$ metros. ¿Cuánta tela sobró?
2. Un cartero dejó $\frac{1}{5}$ de las cartas en una oficina y $\frac{3}{8}$ en un banco. Si después de eso aún le quedaban 34 cartas por repartir, ¿cuántas tenía en principio?
3. En una clase asisten a un examen $\frac{2}{3}$ de los alumnos, y de éstos aprueban $\frac{3}{7}$ y suspenden 24. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Las **situaciones públicas** se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. En este tipo de situaciones suele aparecer la fracción como parte de la unidad. A continuación se exponen algunos ejemplos:

1. En una ciudad hay un depósito de 2300 m^3 que abastece a parte de la población. Se extrae $\frac{1}{4}$ de su capacidad y, posteriormente, se gastan 175 m^3 . ¿Cuántos metros cúbicos quedan? ¿Qué fracción del total representan?
2. El volumen de agua en una presa es de $\frac{3}{5}$ del total. Durante todo un mes en el que está lloviendo deciden abrir las compuertas y dejar salir agua para que no haya peligro, de modo que se desembalsa $\frac{1}{4}$ del agua que había antes de que empezara a llover. Por otra parte, al mismo tiempo que se desembalsa, la presa se va llenando gracias a la lluvia hasta acumular $\frac{1}{3}$ de la capacidad total. ¿Cuál será el volumen de agua de la presa una vez transcurrido el mes de lluvias?
3. Un autobús hace el servicio entre Granada - Madrid. Cuando ha recorrido la cuarta parte del trayecto se encuentra a 25 km de la primera parada, que está a 125 km de Granada. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

Las **situaciones científicas** son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hace un cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras matemáticas. En este tipo de situaciones suele aparecer la fracción como operador. Como ejemplos se pueden encontrar:

1. ¿Cuál es la velocidad de un automóvil que en $5 \frac{2}{37}$ horas recorre $202 \frac{62}{37}$ h kilómetros?
2. Halle una fracción equivalente a $\frac{12}{36}$ tal que:
El numerador sea 3.
El denominador sea 5 veces el denominador original.
El numerador valga la tercera parte del numerador original
3. Una aleación está compuesta por 24 partes de cobre, 4 de estaño y 1 de zinc. ¿Cuántos kilogramos de cada metal habrá en 348 kg. de aleación?

3.9. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

El objetivo fundamental acerca del tema fracciones una vez que los alumnos llegan a la Educación Secundaria Obligatoria es que sean capaces de comprenderlas significativamente y las usen en la resolución de situaciones variadas.

En el segundo ciclo la enseñanza estará orientada hacia una serie de objetivos de aprendizaje, que, de forma general, se pueden expresar de la siguiente manera:

1. Que los alumnos adquieran experiencia sobre los distintos usos de las fracciones a través de la resolución de problemas en contextos variados

2. Que sean capaces de solucionar situaciones con estrategias, herramientas (barras, círculos, figuras, vasos graduados, reglas, dinero, tablas de razones, etc.) y escrituras numéricas diversas, encontrando conexiones entre las mismas. De estas situaciones surgirá la necesidad del establecimiento de equivalencias y órdenes entre fracciones, obteniendo así generalizaciones a las que dan lugar los procedimientos comprendidos y justificados de los alumnos.
3. Que puedan resolver problemas que impliquen operaciones con fracciones apoyándose en los contextos y trabajando con distintas representaciones.

Los focos conceptuales consisten en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos.

Los focos conceptuales se identifican porque establecen prioridades sobre las expectativas de aprendizaje del tema y permiten una adecuada secuenciación de tareas para su enseñanza.

Siguiendo la línea de trabajo de un grupo de la asignatura de Didáctica de Las Matemáticas de la Universidad de Granada que realizó un estudio titulado “Unidad Didáctica de Fracciones” (Alguacil, M.C.; Bueno, F.J., Calvillo, M.C., Castro, E. y García, C., 2009) se pueden establecer tres focos conceptuales para el caso de las fracciones:

1. Significado y usos de las fracciones.
2. Adición y sustracción de fracciones. Comparación de fracciones.
3. Multiplicación y división de fracciones.

Cada uno de estos focos prioritarios incluye una diversidad de hechos, conceptos y procedimientos ligados al mismo.

Si se combina esta elección de focos con la clasificación cognitiva se pueden elaborar varios listados que expresan prioridades en la organización de los contenidos del tema de Fracciones:

1) **Significado y usos de las fracciones:**

1. Situaciones de Reparto:
 - a. Partición de un todo.
 - b. Reparto equitativo.
 - c. Reparto proporcional.
2. Situaciones de medida:
 - a. Por fraccionamiento de la unidad.
 - b. Por conmensurabilidad.
3. Situaciones de trueque.
4. Situaciones de transformación (fracción como operador)
5. Situaciones de división no entera.

2) **Adición y sustracción de fracciones. Comparación de fracciones**

1. Reducción a común denominador.
2. Símbolos de suma y resta.
3. Noción de suma y resta.
4. Composiciones aditivas de fracciones.
5. Algoritmos de suma y resta.

6. Suma y resta con la calculadora.
7. Propiedades de la suma y de la resta.
8. Estimación de sumas y restas.
9. Estructura (Q,+)
10. Fracción irreducible.
11. Reducción a común denominador.
12. Amplificación y simplificación de fracciones.
13. Fracciones equivalentes.
14. Fracción comprendida entre otras dos.
15. Representación de fracciones.
16. Cociente de una fracción (pasar a decimal).

3) **Multiplicación y división de fracciones:**

1. Notaciones del producto y de la división.
2. Algoritmo del producto y división de fracciones.
3. Productos y divisiones con la calculadora.
4. Estimación de productos y divisiones de fracciones.
5. Fracción inversa.
6. Regla de los productos cruzados.
7. Estructura (Q,x)

A partir de las listas elaboradas se realiza una agrupación de objetivos por **focos prioritarios** y vinculación de cada uno de ellos con las competencias PISA.

1) **Profundizar en el significado y uso de las fracciones:**

1. Comprender los distintos conceptos de fracciones.
2. Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción.
3. Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo.
4. Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas.
5. Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana.
6. Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada.
7. Escribir y representar gráficamente fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto.
8. Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas interpretaciones de las fracciones.
9. Descubrir, mediante el uso de materiales manipulativos, los distintos significados de las fracciones.

2) **Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones:**

10. Comparar fracciones:
 - (a) Reduciendo a común denominador.
 - (b) Sin reducir a común denominador.Ordenar fracciones o calcular su equivalente.
11. Sumar y restar fracciones de igual o distinto denominador comprobando el resultado mediante distintos recursos.

12. Manejar la calculadora para comparar y ordenar números fraccionarios.
13. Realizar mentalmente operaciones de suma y resta de fracciones sencillas.
14. Establecer y aplicar las propiedades de la suma de números fraccionarios.
15. Estimar el error cometido en redondeo y en resultados de operaciones.
16. Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones.

3) Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones:

17. Calcular la fracción de una cantidad dada.
18. Multiplicar y dividir fracciones.
19. Enunciar y resolver problemas multiplicativos con fracciones en diferentes situaciones.
20. Conocer y utilizar las propiedades de (Q,x) .
21. Realizar cálculos mentales y con calculadora.

Una idea importante es la vinculación de los objetivos marcados que se esperan desarrollar con las competencias PISA consideradas. El ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo que se conseguirá a través de toda la formación escolar.

Por tanto, los objetivos específicos que desarrollan los escolares contribuyen, en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias matemáticas.

En las siguientes tablas se muestran la contribución que cada capacidad ofrece a las competencias matemáticas PISA:

Foco 1:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Profundizar en el significado y uso de las fracciones		4	2	3	3	1	4	4	3
1	Comprender los distintos conceptos de fracciones.	☀							
2	Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción.	☀		☀				☀	
3	Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo.		☀				☀		
4	Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas	☀					☀	☀	☀
5	Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana.			☀	☀				
6	Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada.		☀					☀	☀
7	Escribir y representar gráficamente fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto.						☀	☀	
8	Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas representaciones de las fracciones.	☀			☀	☀			
9	Descubrir, mediante el uso de materiales manipulativos, los distintos significados de las fracciones.			☀	☀		☀		☀

Foco 2:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones		5	2	1	1	3	1	3	2
10	Comparar fracciones: 1. Reduciendo a común denominador. 2. Sin reducir a común denominador. Ordenar fracciones o calcular su equivalente.	☀						☀	
11	Sumar y restar fracciones de igual y distinto denominador comprobando el resultado mediante distintos recursos.						☀		☀
12	Manejar la calculadora para comparar y ordenar números fraccionarios.	☀				☀		☀	☀
13	Realizar mentalmente operaciones de suma y resta de fracciones sencillas.	☀		☀					
14	Establecer y aplicar las propiedades de la suma de números fraccionarios.		☀			☀		☀	
15	Estimar el error cometido en redondeo y en resultados de operaciones.	☀	☀						
16	Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones.	☀			☀	☀			

Foco 3:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones		1	2	2	1	1	1	3	2
17	Calcular la fracción de una cantidad dada.						☀	☀	☀
18	Multiplicar y dividir fracciones.							☀	
19	Enunciar y resolver problemas multiplicativos con fracciones en diferentes situaciones.			☀	☀	☀			
20	Conocer y utilizar las propiedades de (Q, x) .		☀					☀	
21	Realizar cálculos mentales y con calculadora.	☀	☀	☀					☀

Como se refleja en los gráficos, para el foco de “Profundizar en el uso y significados de las fracciones” se desarrollan más las competencias de “Pensar y Razonar” y “Representar” lo que es natural porque los distintos significados de fracciones admiten múltiples representaciones. Además se cubren de manera razonable el resto de competencias.

Para el foco de “Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones” la competencia que más aparece es “Pensar y Razonar”, aunque el desarrollo de esta competencia no sería posible sin el apoyo de las otras competencias.

Finalmente, para el foco de “Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones” se desarrollan principalmente la competencia de “Lenguaje simbólico” apoyándose en la competencia de “Uso de herramientas tecnológicas”.

A continuación se presenta una tabla en la que se refleja un balance de competencias para todos los focos:

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
10	6	6	5	5	6	10	7

Tal y como se puede observar, las competencias más desarrolladas son “Pensar y razonar” y “Lenguaje Simbólico”, seguidas de cerca por “Herramientas Tecnológicas”. El hecho de que unas competencias se encuentren más presentes que otras es normal, siendo lo importante que todas ellas queden incluidas de una u otra manera.

La competencia de Pesar y Razonar es una actividad fundamental de la matemática que busca plantear y dar respuesta a cuestiones propias de este campo. En la presente Unidad Didáctica, con este competencia se pretende que los escolares conozcan, comprendan y sean capaces de ejemplificar los distintos conceptos relacionados con las fracciones, que sean capaces de identificar relaciones entre diferentes conceptos (por ejemplo, entre los distintos significados del concepto fracción) y que desarrollen y apliquen procedimientos, tales como la obtención del mínimo común múltiplo para comparar, sumar y restar fracciones, etc.)

En cuanto al Lenguaje Simbólico, competencia estrechamente relacionada con la de Representación, se considera un aspecto esencial para poder operar y trabajar matemáticamente con las fracciones. La adquisición de esta competencia permitirá al escolar decodificar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural, manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas...

Finalmente, en relación con las Herramientas Tecnológicas, cabe decir se han vuelto indispensables en la sociedad actual, por lo que es muy importante ir más allá de la enseñanza tradicional y emplear recursos que contribuyan a la resolución de tareas matemáticas, y más concretamente, de aquellas relacionadas con las fracciones. Esto permitirá que los alumnos desarrollen una visión más amplia del tema, siempre desde una perspectiva crítica desde la que sean capaces de detectar tanto las ventajas como las limitaciones de los medios que están empleando.

3.10. LIMITACIONES, ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS

Los niños comprenden progresivamente la noción de fracción, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos. La multiplicidad de significados que pueden tomar las fracciones resulta un escollo para su comprensión. La conceptualización de las fracciones lleva tiempo y los alumnos lo necesitan para comprender, interpretar y usar sus notaciones con sentido en las diferentes aplicaciones de las mismas.

3.10.1 Dificultades y errores relacionados con la comprensión del significado y uso de las fracciones:

Una primera dificultad en el estudio de las fracciones consiste en que los alumnos atribuyan un significado correcto a la noción de fracción, y por tanto, a cada uno de los enteros que aparecen en la escritura de una fracción. Se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales.

Desarrollo de la fracción como parte de un todo:

Parece ser que las primeras ideas de fracción de los niños son de naturaleza tridimensional e imprecisa.

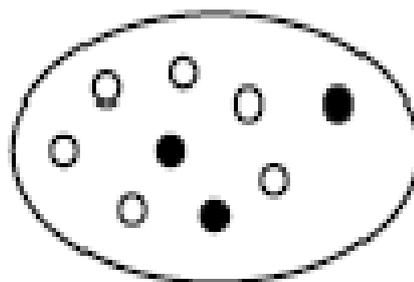
En algunos casos los niños realizan tareas consistentes en fraccionar objetos antes de las edades esperadas o son capaces de comprender la idea de mitad, tercio y sexto aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales. Hay siete criterios para comprender la relación parte-todo:

1. Considerar que una región entera se puede dividir en partes;
2. Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes;
3. Las partes de la partición agotan el todo;
4. El número de partes puede no ser igual al número de cortes; por ejemplo con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta;
5. Todas las partes son iguales;
6. Cada parte en sí misma se puede considerar como un “todo”;
7. El “todo” se conserva, aún cuando se haya dividido en partes.

Siendo bastante frecuente que los alumnos se encuentren con dificultades en la comprensión de estos conceptos.

La fracción como parte en un conjunto discreto de objetos:

Algunos experimentos sugieren que para los niños es más difícil comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos. Puede ocurrir que no tomen el conjunto completo como el entero y caracterizan cada parte asociando a numerador y denominador. Por ejemplo, si se les presenta a los niños 3 fichas negras y 6 blancas y se les pregunta: “¿Qué parte de estas fichas son negras?”, algunos niños responden: “3/6”



Representación de las fracciones como puntos en una recta numérica:

El modelo de recta numérica de las fracciones ocasiona dificultades a los niños que no siempre son capaces de pasar de la representación de áreas a la recta o viceversa. El modelo de recta numérica resulta más difícil que los anteriores.

En la representación lineal se enfatiza la idea de que una fracción, por ejemplo $\frac{4}{5}$ es esencialmente un número, de idéntica naturaleza que los números 0 y 1, pero comprendido entre ambos. A diferencia de las dos representaciones anteriores no se incorpora la idea de relación parte-todo.

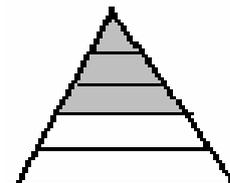
Una ventaja de la representación lineal es que las fracciones impropias son más naturales y no tan diferentes de las fracciones propias y también se visualiza la idea de que las fracciones “extienden” el conjunto de los números naturales y “rellenan los huecos” dejados por éstos en la recta numérica. De esta forma se enlaza de forma natural con la idea de medida no entera.

La fracción como división indicada de dos números enteros:

Al calcular porcentajes o transformar una fracción en decimales es necesario dividir dos enteros. Hay ocasiones en que los niños no comprendan que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales. (Por ejemplo, pueden presentar dificultades cuando se les pide que repartan tres chocolatinas entre cinco niños).

Otros:

En ocasiones, a la hora de identificar una fracción con su posible representación gráfica, no tienen en cuenta la necesidad de que las partes sean equivalentes en área y se centran tan sólo en el número de partes.



Este tipo de dificultades están asociadas con los **Objetivos 1, 2, 3, 4, 7 y 8.**

3.10.2. Dificultades y errores relacionados con la estructura aditiva de las fracciones:

Extrapolar los conocimientos de cálculo (reglas y algoritmos) de los números naturales a las fracciones (objetivos 11, 13, 16, 18):

A la hora de sumar o restar, aplican los operadores sobre los numeradores entre sí y los denominadores entre sí porque generalizan las propiedades de la adición de números naturales en el campo de los números racionales. Por ejemplo, pueden pensar que $2/3+4/5=6/8$ o que $4-2/7=2/7$

Olvidar o modificar algún paso del algoritmo: aditivo, comparativo o equivalencia (objetivos 10, 11, 16):

Comparando fracciones, una fracción como $1/2$ se considera menor que la fracción $1/3$, argumentando que $2 < 3$.

En el caso de equivalencia de fracciones, se puede presentar una situación en la que la fracción sea considerada como un par de números naturales que no están relacionados entre sí.

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$$

La respuesta está basada en el reconocimiento de un modelo aditivo en los numeradores (sumar 6) que se traslada a los denominadores.

Un entero se confunde con su inverso: $1/7$ se confunde con $7/1$, o bien, $1/7$ y $7/1$ se consideran como dos escrituras equivalentes.

Aplicar la simplificación del producto a la suma de fracciones:

Por ejemplo: $\frac{2+5}{2+7} = \frac{5}{7}$

3.10.3. Dificultades y errores relacionados con la estructura multiplicativa de las fracciones:

Entender que el producto de un número entero por una fracción propia disminuye y que la división de un número entero por una fracción propia aumenta (objetivo 17)

La influencia que el conocimiento de los números naturales ejerce en el proceso de aprendizaje de las fracciones se manifiesta en otros muchos aspectos. Es difícil para el niño entender que el producto de dos fracciones puede ser menor que cualquiera de ellas, al contrario de lo que sucede en los números naturales. Como lo que él tiene asimilado son los algoritmos con esos números a menudo trata de forzar los algoritmos con fracciones de manera que el resultado se ajuste a lo que le dicta su intuición.

Olvidar o modificar algún paso del algoritmo de la división o de la multiplicación (objetivos 17, 18, 19)

Para multiplicar entre sí dos fracciones, reducen a un común denominador y después multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. Se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación.

La mitad de la fracción $1/6$ se designa frecuentemente por la fracción $1/3$ (que es en realidad el doble de $1/6$), argumentando que la mitad de 6 es 3.

No respetar la jerarquía de operaciones (objetivos 14, 20, 21):

Van realizando las operaciones según está escrita y no respetan el orden en la prioridad de algoritmos.

Una vez realizado el análisis didáctico de las fracciones, y teniendo en cuenta la información proporcionada por el mismo, se está en disposición de poder realizar la descripción de la unidad didáctica como tal.

4. DESCRIPCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El presente capítulo se dedica casi en su totalidad a describir la secuenciación y organización de las tareas de la unidad didáctica. No obstante, antes de entrar en materia, es interesante hacer una pequeña descripción de la metodología a seguir, cuáles son los niveles de complejidad y qué materiales y recursos se pueden emplear al trabajar con fracciones.

4.1. METODOLOGÍA A SEGUIR

Se pretende introducir al alumnado en el mundo de las Matemáticas a través de la utilización práctica de las mismas. Se dará protagonismo al alumno, basándose en el hecho de que si el escolar descubre los conceptos por sí mismo éstos se asientan de manera más duradera en su estructura lógica.

La metodología que se seguirá será activa, con varias exposiciones teóricas y realización de numerosas actividades y ejercicios que permitirán que los alumnos de una forma progresiva afiancen los nuevos conceptos y técnicas matemáticas.

Se procurará atender a la diversidad de la clase. Para ello se entregarán ejercicios y actividades de refuerzo o ampliación.

También se motivará la participación en clase ya que se pretende que los escolares tengan una actitud abierta y crítica.

Finalmente, se potenciarán todas las actividades que sirvan para conectar la materia con otras asignaturas que curse el alumno/a, y con su vida cotidiana.

De manera general, el esquema metodológico de las sesiones será el siguiente:

1. Realización en la pizarra de las tareas propuestas y aclaración de dudas del día anterior.
2. Introducción de los nuevos conceptos de manera intuitiva mediante situaciones que resulten familiares o conocidas por el alumno.
3. Asociación de dichos conceptos intuitivos con sus análogos matemáticos.
4. Presentación de problemas y ejercicios que ejemplifique los contenidos a tratar en la sesión.
5. Uso del ordenador u otros recursos tecnológicos o manipulativos para la representación gráfica de las fracciones, así como para la realización de operaciones con las mismas.
6. Se propondrán tareas relacionadas con lo que se ha estado bien en clase para que asienten los nuevos conocimientos en casa.

4.2. NIVELES DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS ESCOLARES

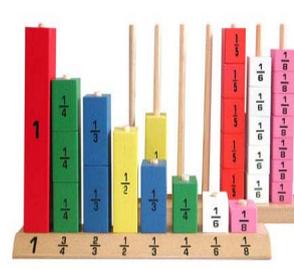
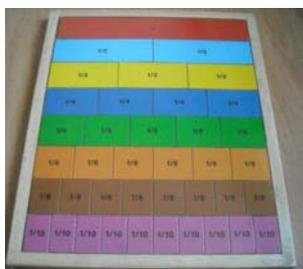
Cada una de las competencias establecidas por el proyecto PISA admite diferentes niveles de profundidad. Los expertos consideran tres niveles de complejidad en los problemas matemáticos y en las competencias demandadas por los mismos:

1. Reproducción: Aquí se incluyen las tareas más sencillas, las cuales se introducen en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente. Además, estas tareas no requieren de cálculos complejos.
2. Conexión: Las tareas correspondientes a este nivel de complejidad van un poco más allá, introduciendo situaciones y contexto que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que no se ha practicado después. Los niveles de cálculo se complican, pero sin llegar a ser dificultoso.
3. Reflexión: En este nivel se realizan los ejercicios de mayor dificultad o ampliación. Requiere un nivel de comprensión de todo lo aprendido y una organización de los conceptos clave. Los contextos de trabajo son nuevos o complejos y buscan una generalización de los resultados. El nivel de cálculo puede tener una mayor dificultad y se exigirá una buena capacidad de argumentación y justificación, que le suele suponer un obstáculo al alumno para completar el problema.

Por lo general, las tareas propuestas para este tema pertenecerán a una de las dos primeras categorías, ya que los niveles de conocimiento que tienen los estudiantes en este curso son aún muy básicos y lo que se pretende es que comprendan y seguidamente automaticen los procedimientos de resolución para adquirir destrezas. Más adelante, en cursos posteriores, las tareas sí deberían dar lugar a que los escolares lleguen a los niveles de reflexión.

4.3. MATERIALES Y RECURSOS

Materiales manipulativos: Aquí se pueden encontrar el pastel de fracciones, el círculo de fracciones el diagrama de Freudenthal, escala de fracciones...



Juegos: Entre los distintos juegos que existen con fracciones se pueden destacar:

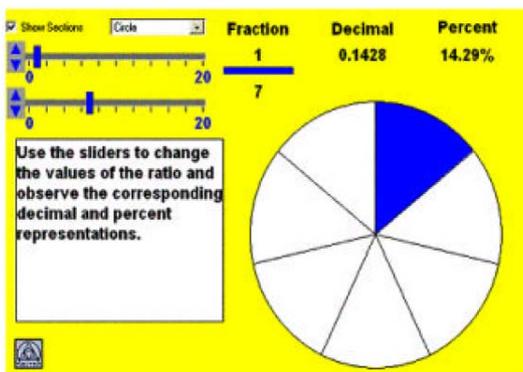
1. El uso de hojas de papel de acetato en los que aparecen diversos cuadrados o rectángulos divididos en partes iguales, los cuales permiten operar con fracciones.
2. Baraja de fracciones: Aquí se pueden encontrar distintos tipos. Una de las barajas, la cual apareció en un artículo de la revista SUMA, está orientada a niños de 12 años o más que están adquiriendo el concepto de fracción. La baraja contiene 40 cartas distribuidas en palos y series y cada una de las cartas contiene siete formas de representación de una fracción determinada. Además también se pueden encontrar comodines. Con esta baraja se pueden llevar a cabo distintos juegos, ya sean individuales o colectivos.

Nuevas tecnologías: Las fracciones también han llegado a las nuevas tecnologías, permitiendo que los estudiantes las manipulen pasando de unas formas de representación a otras mediante el uso de programas informáticos, calculadoras, applets, etc.

Como ejemplos, se encuentran:

<http://www.thatquiz.org/es/index.html>:

Este programa permite a los estudiantes realizar diversas operaciones con fracciones (identificación, operaciones aritméticas, comparaciones, medias, simplificaciones, etc.)



<http://illuminations.nctm.org/tools/FractionPie/ver2.html>:

Este otro programa permite explorar varios modelos para representar fracciones con numeradores y denominadores ajustables. Un mismo número racional se usa para expresar una parte de un todo en los casos en que el todo viene dado mediante un círculo, un rectángulo y un conjunto discreto de fichas circulares. Se comparan simultáneamente tres notaciones: fracción, decimal y porcentaje.

Finalmente, existen numerosos vídeos educativos relacionados con el aprendizaje de las fracciones:

<http://www.youtube.com/watch?v=S1vm9Mp2YWY&feature=related>

<http://www.youtube.com/watch?v=FrmL5gldBjA&feature=fvwr>

<http://www.youtube.com/watch?v=cvTTP1k8Ydk>

4.4. SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

A la hora de realizar la secuenciación y organización de las tareas es importante establecer unas prioridades de aprendizaje que darán lugar a la adquisición por parte de todos los alumnos de una serie de conocimientos mínimos, destacando:

1. Distinguir los diferentes significados y usos de las fracciones.
2. Trabajar con los diferentes sistemas de representación.
3. Reconocer la fracción que corresponde a una parte de un total determinado.
4. Pasar fracciones a forma decimal.
5. Calcular la fracción de un número.
6. Generar fracciones equivalentes a una dada.
7. Simplificar fracciones sencillas.
8. Aplicar todo lo anterior para interpretar, expresar y resolver situaciones de la vida cotidiana.

Además, sería muy interesante que la mayor parte de los alumnos fueran capaces de:

1. Calcular la fracción de un número aplicándolo en un problema directo así como calcular el total conociendo la parte y la fracción que dicha parte supone del total en un problema inverso.
2. Pasar un decimal exacto a forma fraccionaria.
3. Comparar fracciones pasándolas a forma decimal.
4. Calcular y reconocer fracciones equivalentes a una dada.
5. Calcular el término desconocido en una pareja de fracciones equivalentes.
6. Resolver situaciones problemáticas en las que se calcula la fracción de un número.

Y finalmente, para los alumnos que pueden llegar más lejos:

1. La representación de fracciones en la recta numérica.
2. La resolución de problemas de dificultad creciente.

Visto esto, se pasa a la organización del tema en Sesiones, las cuales tendrán 1 hora de duración:

SESIÓN 1:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta primera sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción (PR, C, LS).
- Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo (AJ, R).
- Escribir y representar gráficamente fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto (R, LS).
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana (C, M).

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Aproximación intuitiva al concepto de fracción (10 minutos).

Para ello se propone mostrar una fotografía como la siguiente:



Y realizar una serie de preguntas:

1. ¿Qué parte de los dulces ocupan las cañas de chocolate? ¿Y las palmeritas?
2. Si un chico se come 2 trufas, ¿Qué fracción de las trufas se ha comido? ¿Y qué fracción del total de los dulces que hay en la bandeja?
3. Paula compra $\frac{4}{10}$ de los dulces de merengue y $\frac{2}{5}$ de las palmeritas de chocolate. ¿Cuántos dulces se lleva?

Con esta actividad se pretende motivar a los estudiantes, mostrando la utilidad de las fracciones como herramientas potentes para expresar situaciones reales y para resolver los problemas que de ellas se derivan.

Para lograr los fines perseguidos, se sugiere que esta actividad se realice en grupo, dejando a los niños que discutan posteriormente de una forma ordenada cuáles son las conclusiones a las que han llegado.

Qué son las fracciones. Distintas formas en las que se pueden encontrar. (25 minutos).

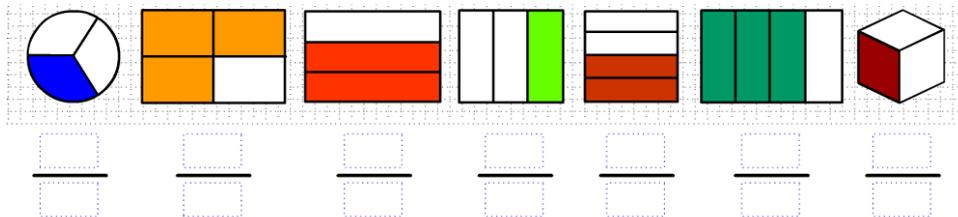
1. Fracciones como parte de la unidad.
2. Fracciones propias, impropias e iguales a la unidad.
3. Fracciones como operadores.
4. Fracciones como una división indicada. Comparación de fracciones mediante su expresión decimal. Paso de decimal exacto a fracción.

Puesto que son varios los conceptos de fracciones y que están todavía, total o parcialmente, en fase de construcción, es conveniente realizar una revisión sistemática de los mismos. Se comenzará con las nociones más sencillas e intuitivas aumentando paulatinamente el nivel de dificultad a la vez que se hace hincapié en los diferentes sistemas de representación (gráfico, verbal y simbólico).

Resolución de ejercicios sencillos (25 minutos).

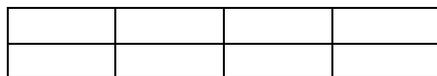
Una vez vistos los conceptos, es interesante que los estudiantes automaticen los procedimientos de cálculo para lo que se irán realizando ejercicios de reproducción. Como ejemplos, se proponen los siguientes:

Ejercicio 1. Escribe la fracción que corresponda a la parte coloreada del dibujo:

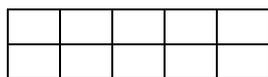


Ejercicio 2. Representa las fracciones que se indican coloreando los recuadros que sean necesarios:

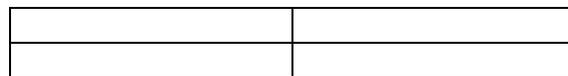
$$\frac{3}{8}$$



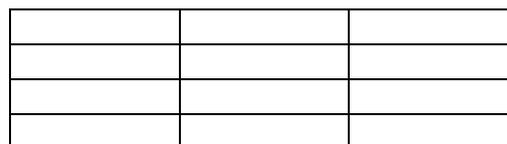
$$\frac{4}{10}$$



$$\frac{2}{4}$$



$$\frac{8}{12}$$



Ejercicio 3. Indica, para cada fracción, si es menor, igual o mayor que la unidad:

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{7}$$

$$\frac{9}{9}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{16}{17}$$

$$\frac{20}{19}$$

Ejercicio 4. Represente la unidad sobre la recta numérica, a partir de la ubicación de la fracción dada:



Ejercicio 5. Calcula:

$\frac{1}{4}$ de 8

$\frac{1}{3}$ de 12

$\frac{3}{7}$ de 21

$\frac{3}{4}$ de 8

$\frac{2}{3}$ de 12

$\frac{5}{7}$ de 21

$\frac{1}{6}$ de 18

$\frac{1}{7}$ de 14

$\frac{3}{5}$ de 85

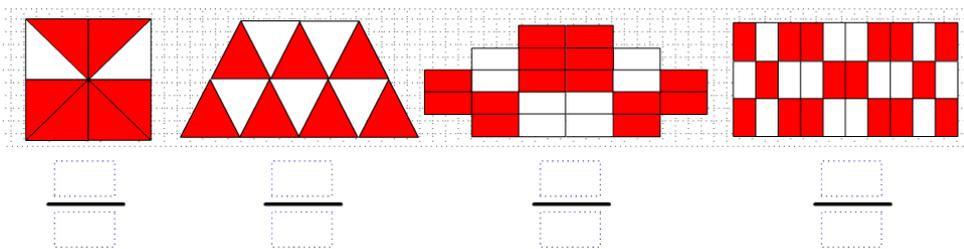
$\frac{5}{6}$ de 18

$\frac{2}{7}$ de 14

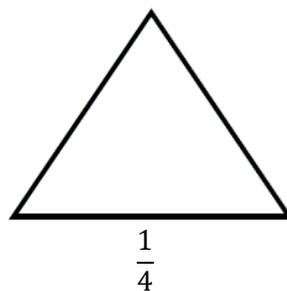
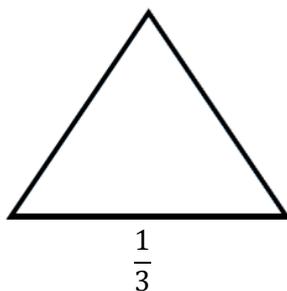
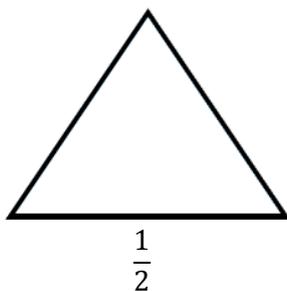
$\frac{7}{5}$ de 85

Tareas para casa:

Tarea 1. ¿Qué fracción se ha coloreado en cada figura?


 $\frac{\square}{\square}$
 $\frac{\square}{\square}$
 $\frac{\square}{\square}$
 $\frac{\square}{\square}$

Tarea 2. Colorea en cada triángulo la fracción indicada:



Tarea 3. Ubica las siguientes fracciones en la recta numérica:

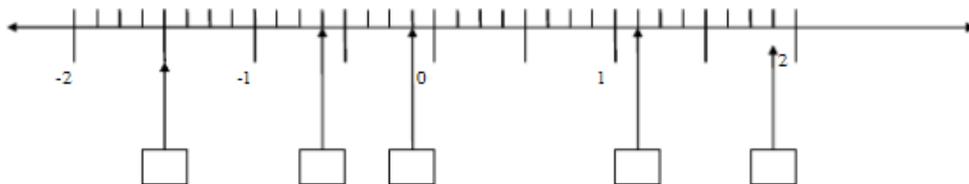
a) $1\frac{1}{2}$

b) $1\frac{7}{8}$

c) $1\frac{1}{8}$

d) $-\frac{5}{8}$

e) $-\frac{1}{8}$



Tarea 4. Se le propondrá a los alumnos que hagan una investigación acerca de cuál ha sido la evolución de las Fracciones a lo largo de la historia. Dicho trabajo, el cual tendrá un porcentaje sobre la nota final del tema, se entregará el día que se realice la prueba escrita.

SESIÓN 2:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta segunda sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción (PR, C, LS).
- Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo (AJ, R).
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana (C, M).
- Simplificar fracciones. (AJ, LS, HT).
- Escribir y representar gráficamente fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto (R, LS).
- Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas representaciones de las fracciones (PR, M, RP).
- Descubrir, mediante el uso de materiales manipulativos, los distintos significados de las fracciones (C, M, R, HT).

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos del día anterior (5 minutos).

Al ir haciendo a los alumnos preguntas aleatorias sobre lo que se ha explicado el día anterior, el profesor podrá apreciar el grado de comprensión de los mismos sobre la materia impartida, así como si han estudiado en casa. Además, esto será útil para que los alumnos aprendan a expresarse en público delante de sus compañeros empleando un lenguaje matemático adecuado.

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Con esto se consigue que aquellos alumnos que aún están un poco despistados se centren ya que deberán estar atentos para corregir sus ejercicios mientras los resuelven otros compañeros o el profesor.

Resolución de ejercicios sencillos para avanzar un poco a la vez que se afianzan los conocimientos (10 minutos).

Ejercicio 1. De una caja de 24 bombones se han consumido $\frac{1}{6}$. ¿Cuántos bombones se han consumido? ¿Cuántos quedan?

Ejercicio 2. En un campamento internacional de verano hay 280 campistas, de los que $\frac{3}{7}$ son españoles. ¿Cuántos españoles hay en el campamento?

Ejercicio 3. Sabiendo que los boquerones valen 5,4 €/kg y la merluza 13 €/kg, ¿cuánto cuesta $\frac{1}{4}$ de boquerones? ¿Y $\frac{3}{4}$ de merluza?

Con esto lo que se pretende es que los alumnos vayan desarrollando habilidades y se esfuercen, por lo que se les dejará unos minutos para que piensen cómo se resuelven las tareas y posteriormente se corregirán entre toda la clase.

Utilización de materiales didácticos (20 minutos).

Se llevarán a clase algunos de los juegos y materiales didácticos descritos en apartados anteriores para que los escolares puedan ver cómo son y jugar con ellos. También se les puede proponer que busquen información en internet y que confeccionen su propio dominó de fracciones.

Introducción a las Fracciones Equivalentes (15 minutos).

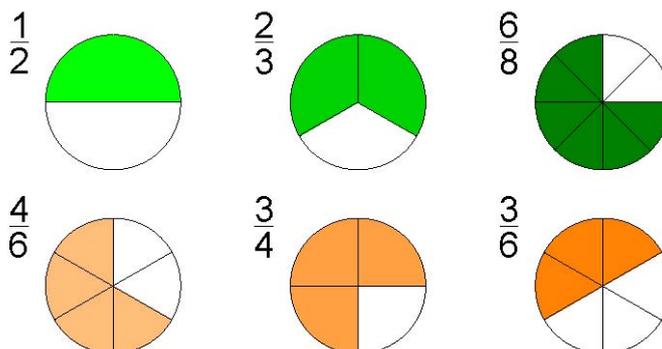
1. Qué son las fracciones equivalentes.
2. Cómo se obtienen las fracciones equivalentes.

En este tiempo no se busca impartir toda la materia relativa a las fracciones equivalentes, sino hacer simplemente una introducción para que los escolares se vayan familiarizando con las mismas.

Los conceptos relativos a las fracciones equivalentes forman la base en la que se sustentan una serie de contenidos fundamentales, como la simplificación, la reducción a común denominador, la justificación de los procedimientos para sumar y restar fracciones y, más adelante, en cursos superiores, la construcción del concepto de número racional.

Por lo tanto, en esta introducción se comenzará identificando y visualizando la equivalencia mediante representaciones gráficas para casos muy sencillos y observando que si se multiplican los dos términos de una fracción por el mismo número, la porción representada no varía.

Se propone para ello, mostrar ejemplos como el siguiente: Busca, entre éstas, tres pares de fracciones equivalentes:



Tareas para casa:

Tarea 1. Halla los pares de fracciones equivalentes y colócalas en parejas:

$$\frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{8}{3}, \frac{2}{11}, \frac{6}{9}$$

$$\frac{16}{6}, \frac{15}{21}, \frac{4}{22}, \frac{2}{3}, \frac{12}{9}$$

Tarea 2. La cuarta parte de las niñas y niños del colegio han jugado alguna vez con el monopatín. ¿Qué fracción de personas del colegio no han jugado con el monopatín? Da tres fracciones equivalentes a la anterior. Haz una representación gráfica de cada una de las cuatro fracciones equivalentes.



Tarea 3. Un vaso tiene una capacidad de un quinto de litro. ¿Con cuántos vasos de $\frac{1}{5}$ se puede conseguir un litro? El niño se ha bebido dos vasos completos de agua. ¿Qué fracción de litro ha bebido? ¿Podrías decir dos fracciones equivalentes a la anterior? Representalas gráficamente.



SESIÓN 3:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta segunda sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción (PR, C, LS).
- Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo (AJ, R).
- Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada (AJ, LS, HT).
- Descubrir, mediante el uso de materiales manipulativos, los distintos significados de las fracciones (C, M, R, HT).

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (10 minutos).

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Se completa el estudio de Fracciones Equivalentes (40 minutos).

1. Simplificación de fracciones.
2. Relación entre los términos de dos fracciones equivalentes.
3. Cálculo del término desconocido.

La simplificación de fracciones surgirá como una aplicación de la equivalencia en el empeño de presentar resultados y procesos de la forma más reducida posible. Además, ligado a los procedimientos de simplificación, aparece el concepto de fracción irreducible como representante óptimo de toda una clase de fracciones que tienen el mismo valor.

Posteriormente, la relación entre los términos de dos fracciones equivalentes, permitirá a los alumnos comprobar que, en fracciones reconocidas previamente como equivalentes, los productos de los términos cruzados coinciden.

Finalmente, ésta será la base para aprender el procedimiento para calcular el término desconocido en dos fracciones equivalentes cuando se conocen los otros tres.

Para esta sesión se propone la utilización de ordenadores. Los niños entrarán en la página web “Matemáticas interactivas y manipulativas”, cuyo link es:

<http://i-matematicas.com/blog/2009/10/21/fracciones-equivalentes-fraccion-irreducible/>

En esta página podrán encontrar una explicación visual del concepto de fracciones equivalentes que se está dando en clase:

Estas dos porciones de pizza son iguales

SON EQUIVALENTES

pero ésta procede de una pizza que se dividió en 8 porciones y ésta otra procede de una que se dividió en 16 porciones

Vamos a expresarlas en forma de fracción

Tiempo: 5

completa las dos fracciones para que sean equivalentes a $\frac{3}{6}$

$\frac{3}{6} = \frac{8}{12} = \frac{9}{18}$

15 12 18 6 13

Intentos: 1 Aciertos: 1

Traslada los números necesarios para que las fracciones sean equivalentes

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{3}{15}$

Tiempo: 61

56 32 48 14 15 10 18

Traslada cuatro de estos números al lugar adecuado

También encontrarán una explicación visual de cómo entender el proceso de reducción de fracciones así como ejemplos para practicar con distinto nivel de ayuda por parte del ordenador:

$\frac{18}{126} = \frac{9}{63} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

Como 3 y 21 son múltiplos de tres dividimos por 3

Simplifica la fracción $\frac{27}{189}$

Tiempo: 4

$\frac{27}{189} = \frac{9}{63} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

51 27 12 51 28 7 8

Traslada los números necesarios para simplificar paso a paso la fracción

Tiempo: 24

Completa la fracción para que sea la irreducible de $\frac{2}{8}$

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $8 \cdot 1 = 8$

Tiempo: 20

Simplifica la fracción $\frac{20}{40}$

$\frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{5}{10}$

11 4 1 4 16

Traslada uno de estos números al lugar adecuado

Tiempo: 20

Simplifica la fracción $\frac{20}{40}$

$\frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{5}{10}$

50 22 57 17 34 10 10
50 4 1 37 35 47 50

Tareas para casa.

Tarea 1. De los 1575 volúmenes que tiene la biblioteca del colegio, en este momento están prestados 630. ¿Qué fracción de libros está prestada?

Tarea 2. En la biblioteca del colegio hay 1575 volúmenes, de los que están en préstamos $\frac{2}{5}$ partes- ¿Cuántos libros hay prestados?

Tarea 3. La biblioteca del colegio tiene 630 libros en situación de préstamo, lo que supone dos quintas partes del total. ¿Cuántos volúmenes posee la biblioteca en total?

SESIÓN 4:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta cuarta sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción (PR, C, LS).
- Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo (AJ, R).
- Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas (PR, R, LS, HT).
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana C,M).
- Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada (AJ, LS, HT).
- Escribir y representar gráficamente fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto (R, LS).
- Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas representaciones de las fracciones (PR, M, RP).
- Descubrir, mediante el uso de materiales manipulativos, los distintos significados de las fracciones (C, M, R, HT).

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (10 minutos).

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Ejercicios a realizar en clase (40 minutos).

Una vez llegado este punto, y antes de introducir las operaciones con fracciones, puede resultar interesante dedicar una sesión a la resolución de actividades con el fin de asentar conocimientos. Esto permitirá a los alumnos terminar de asimilar los conocimientos que se han dado hasta el momento y mecanizar los procedimientos necesarios. Además, se puede ir aumentando poco a poco el nivel de dificultad de las tareas.

Ejercicio 1. Escribe cinco fracciones equivalentes a $\frac{5}{9}$, multiplicando numerador y denominador por un mismo número.

Ejercicio 2. Escribe una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$:

- a) Cuyo numerador sea 21.
- b) Cuyo denominador sea 48

Ejercicio 3. Halla la fracción irreducible de:

$\frac{30}{45}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{56}{80}$	$\frac{45}{24}$	$\frac{200}{800}$	$\frac{300}{140}$
$\frac{165}{330}$	$\frac{140}{200}$	$\frac{360}{480}$	$\frac{216}{144}$	$\frac{550}{250}$	$\frac{785}{25}$

Ejercicio 4. En un cine hay 56 personas, de las que $\frac{4}{7}$ son chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay?

Ejercicio 5. Si un Kg. de jamón cuesta 24 euros, ¿Cuánto costarán $\frac{3}{4}$ Kg.? ¿Y medio Kg.? ¿Y un Kg. Y medio?

Ejercicio 6. Transforma cada fracción en un número decimal:

$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{17}{10}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{6}$

Ejercicio 7. Expresa cada decimal en forma de fracción:

0,6	1,7	2,5
0,04	0,21	1,25

Ejercicio 8. Ana y Rosa han comprado un bolígrafo cada una. Ana ha gastado $\frac{4}{5}$ de un euro y Rosa 75 céntimos. ¿Cuál de los dos bolígrafos ha salido más caro?

Tareas para casa:

Tarea 1. Julia compró un queso de 2 kilos y 800 gramos, pero ya ha consumido dos quintos. ¿Cuánto pesa el trozo que queda?

Tarea 2. Un hotel tiene 80 habitaciones, de las que el 20% están vacías. ¿Qué fracción de las habitaciones están vacías? ¿Cuántas están vacías?

Tarea 3. Tres kilos de pasteles se reparten en cinco bandejas. Cada bandeja se vende por 6 euros. ¿A cómo se vende el kilo de pasteles?

Tarea 4. Se han sembrado de alfalfa los $\frac{4}{5}$ de la superficie de una finca, y aún quedan 600 metros cuadrados son sembrar. ¿Cuál es la superficie de la finca?

SESIÓN 5:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta quinta sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción (PR, C, LS).
- Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo (AJ, R).
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana (C,M).
- Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas (PR, R, LS, HT).
- Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada (AJ, LS, HT).
- Comparar fracciones:
 - Reduciendo a común denominador.
 - Sin reducir a común denominador.
 - Ordenar fracciones o calcular su equivalente.
- Manejar la calculadora para comparar y ordenar números fraccionarios.

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (10 minutos).

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (15 minutos).

Explicación de la reducción a común denominador (35 minutos).

Uno de los contenidos fundamentales de la unidad es la reducción de fracciones a común denominador, por lo tanto, se busca una comprensión profunda del proceso antes de automatizar el procedimiento. Es más, lo ideal sería que el alumno elaborara dicha automatización como una consecuencia surgida de la reiteración surgida de la práctica razonada. No obstante, antes de explicar esto se comenzará con la comparación de fracciones con igual denominador o igual numerador.

Finalmente, se muestra la aplicación del procedimiento aprendiendo en la comparación y la ordenación de fracciones.

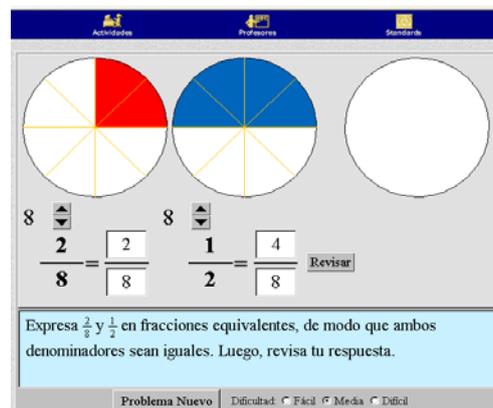
Para ayudar a la comprensión gráfica de lo que está realizando, es decir, qué significa reducir a común denominador, se propone emplear un programa muy sencillo que se encuentra en Internet de manera gratuita y que muestra lo que se va a explicar en clase de forma muy intuitiva:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_106_g_4_t_1.html?from=topic_t_1.html

“Para encontrar un denominador común, usa las flechitas que están debajo de cada entero. La flechita negra con dirección hacia arriba incrementa el número de partes en que se divide un entero. La flechita con dirección hacia abajo disminuye el número de partes.”

“Una vez que el denominador común ha sido identificado, escribe los números (numerador y denominador) de la fracción equivalente dentro de los cuadros en blancos apropiados. Para revisar tu respuesta haz clic en Revisar.”

El programa tiene la ventaja de mostrar varios niveles de dificultad, lo que permitirá que los alumnos vayan avanzando a medida que comprenden los conceptos.



Quando hayan realizado diversos ejercicios con el ordenador se puede invitar a los alumnos a que reflexionen sobre qué tienen en común los denominadores que van poniendo para así poder introducir el concepto matemático como tal.

Las explicaciones se completarán con numerosos ejercicios de reproducción en los que se reduzca a común denominador, se compraren fracciones y se ordenen de menor a mayor (o de mayor a menor) de modo que ayuden a los alumnos a sistematizar los procedimientos.

Tareas para casa.

Serán tareas del tipo que se han propuesto para la sesión en las que se trabaje con reducción a común denominador.

SESIÓN 6:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta sexta sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana C,M).
- Simplificar fracciones. Hallar la fracción irreducible a una dada (AJ, LS, HT).
- Sumar y restar fracciones de igual y distinto denominador comprobando el resultado mediante distintos recursos.
- Realizar mentalmente operaciones de suma y resta de fracciones sencillas.
- Establecer y aplicar las propiedades de la suma de números fraccionarios.
- Estimar el error cometido en redondeo y en resultados de operaciones.
- Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones.

El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (10 minutos).

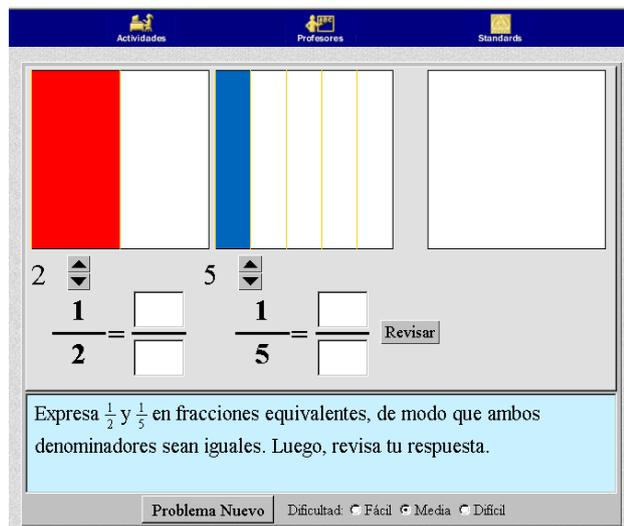
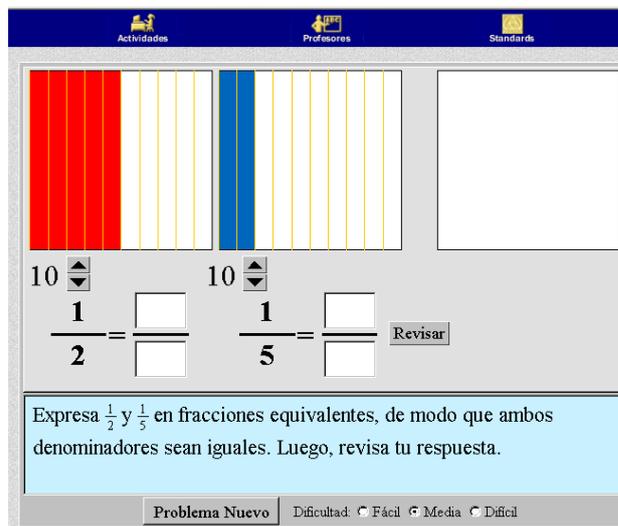
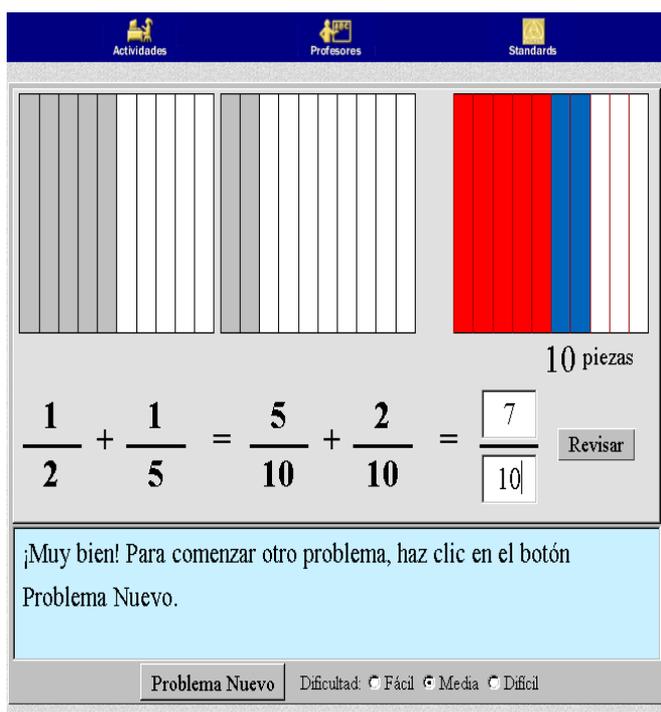
Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Suma y resta de fracciones (40 minutos).

1. Con igual denominador.
2. Con distinto denominador.
3. Suma de fracciones con números enteros.

En esta sesión se propone continuar utilizando el programa informático de la sesión anterior pero completando la secuencia con la suma y resta de fracciones una vez que se ha reducido a común denominador. De este modo, se seguirá una secuenciación lógica y natural desde un nuevo punto de vista:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_106_g_4_t_1.html?from=topic_t_1.html

Una vez que hayan obtenido común denominador tal y como realizaron en la sesión anterior (lo que se muestra en las imágenes anteriores), el programa pedirá a los alumnos que realicen una suma o resta.

“Podrás combinar las representaciones de fracciones arrastrando las representaciones hacia dentro de la tercera gráfica. Para hacer esto haz clic sobre una porción coloreada de la gráfica y, dejando presionado el botón del mouse, arrástrala hasta la tercera gráfica.”

*“Entra los números apropiados de la suma en los cuadros de la fracción. Para hacer esto, haz clic en el cuadro que representa el numerador y escribe su valor, haz lo mismo con el denominador. Haz clic en *Revisar* para revisar tu respuesta.”*

Como menciona Irma Saíz en su artículo: “Fracciones. Un aprendizaje diferente en el tema fracciones” (1990) los métodos y las reglas en este tema son numerosos:

1. Hay una regla para sumar fracciones de igual denominador y otra para distintos denominadores,
2. Variadas reglas para comparar fracciones,
3. Reglas para pasar de número mixto a fracción y viceversa
4. Reglas para convertir una fracción en número decimal, etc.

En general, los alumnos no llegan a la diferenciación y construcción de estas reglas en poco tiempo y cuando se no se les deja suficiente tiempos, lo que hace es memorizarlas de una forma mecánica, lo que provoca confusiones, olvidos o uso parcial de las mismas.

Tal y como se decía anteriormente, lograr la adquisición de los conceptos que el contenido fracciones involucra es un proceso lento y complejo.

De ahí que se debe comenzar a trabajarlos desde la Educación Primaria, poniendo especial énfasis durante el la Educación Secundaria en la comprensión y representación de las mismas, así como en el uso de una correcta notación matemática.

Tareas para casa.

Se propondrán tareas de reproducción dentro del ámbito científico matemático en las que se apliquen los conceptos explicados en clase. Para ello, se sugiere que hagan aquellas que vengan en el libro de texto.

SESIÓN 7:

Los objetivos y capacidades a desarrollar en esta sexta sesión son:

- Comprender los distintos conceptos de fracciones (PR)
- Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana C,M).
- Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones.
- Calcular la fracción de una cantidad dada (R, LS, HT).
- Multiplicar y dividir fracciones (LS).
- Realizar cálculos mentales. (PR, AJ, C).

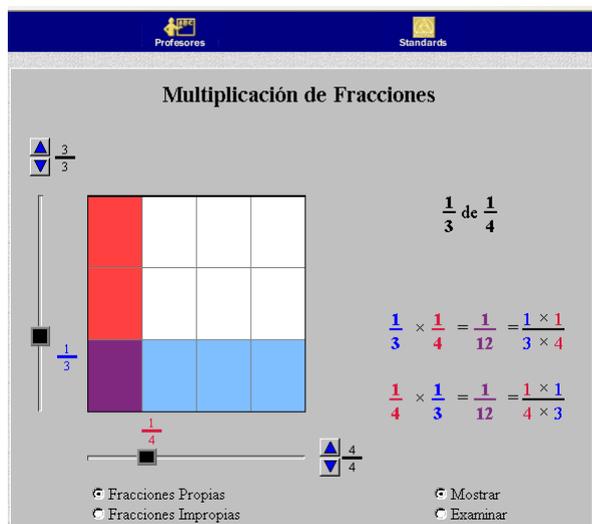
El desarrollo de la sesión se llevará a cabo de la siguiente manera:

Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (10 minutos).

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Multiplicación y División de Fracciones. Fracciones inversas (40 minutos).

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_194_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html



Nuevamente se va a recurrir a la utilización de herramientas tecnológicas para apoyar la explicación que se haga en la pizarra acerca de la estructura multiplicativa. Dicha herramienta consiste en un applet que permite a los alumnos ir manipulando las cantidades con el fin de poder ver físicamente qué es lo que está ocurriendo con las fracciones:

“Usa este manipulador para demostrar, explorar y practicar multiplicando fracciones gráficamente”.

“El enrejado representa la multiplicación de dos fracciones entre sí, mostrando una fracción en rojo

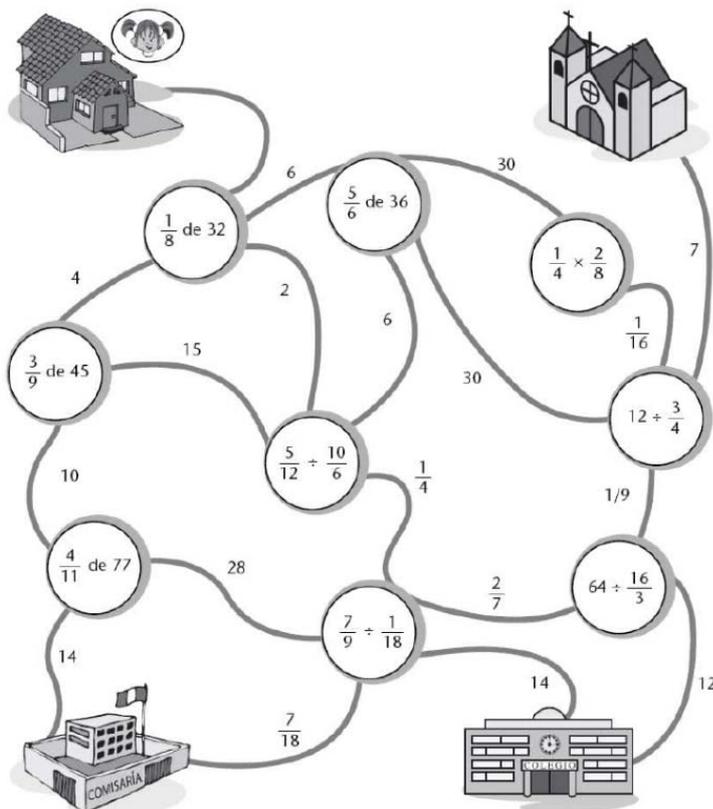
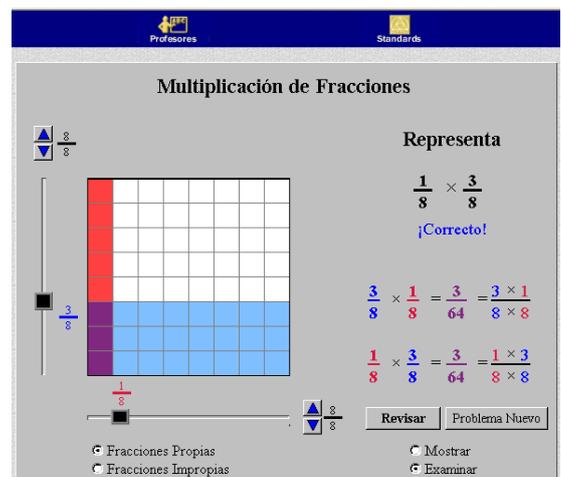
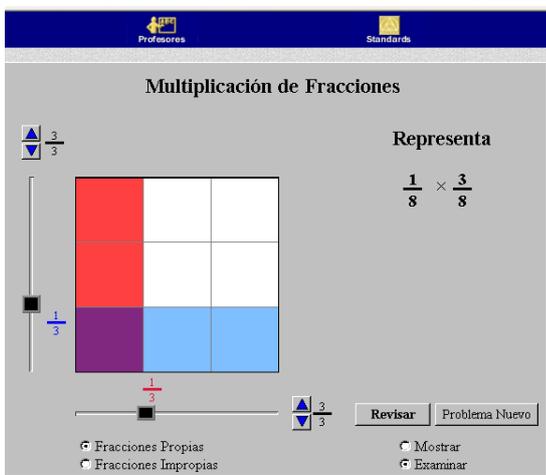
en la parte izquierda y otra en azul en la parte inferior del enrejado. El área de la región que se solapa, mostrada en morado, es el producto (resultado de multiplicar) las fracciones”.

“Las ecuaciones que aparecen a la derecha muestran el mismo producto que representa el enrejado”.

“Para cambiar los numeradores de las fracciones que se multiplican utiliza las barras deslizadoras. Para cambia los denominadores de las fracciones haz clic en los botones de las flechitas azules (hacia arriba o hacia abajo).

Con la opción *Mostrar* seleccionada, el manipulador es usado para demostrar y explorar la multiplicación de fracciones”.

Por otra parte, además de poder manipular, el programa presenta la opción *Examinar* con la aparecerá un problema para resolver:



Tareas para casa.

Se propondrá que realicen varios de los ejercicios del libro de texto en el que aparezca tanto la estructura aditiva como la multiplicativa.

Además, se incluye una tarea en la que los estudiantes tendrán que ir resolviendo distintas operaciones relacionadas con fracciones para lograr resolver un laberinto:

Tarea 1. Lucía ha comenzado a caminar, pero no recuerda dónde quería ir, por lo que cada vez que llega a un cruce, tiene que resolver un pequeño problema para poder seguir avanzando. ¿Cuál es su destino?

SESIONES 8 y 9:

En estas sesiones se procurará cubrir la mayor parte posible de objetivos puesto que se trata de dos sesiones de repaso de lo que se ha ido dando a lo largo de todo el tema.

El desarrollo de las sesiones se llevará a cabo de la siguiente manera:

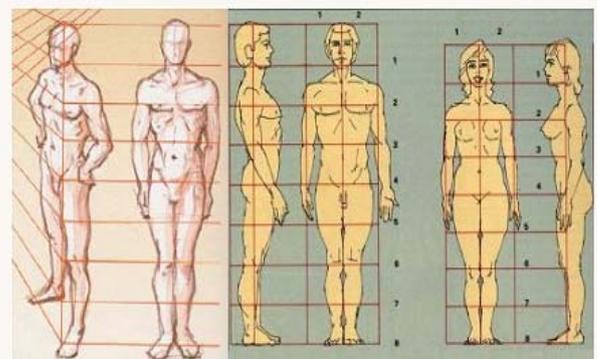
Rueda de preguntas y repaso de los conceptos anteriores (5 minutos).

Corrección de las tareas que llevaban para casa y resolución de dudas (10 minutos).

Un juego antes de comenzar para despertar el interés. Sesión 8 (10 minutos).

Es muy interesante descubrir que nuestro cuerpo está armónicamente proporcionado y que algunas partes son exactamente fracciones de otras. ¿Quieres comprobarlo?

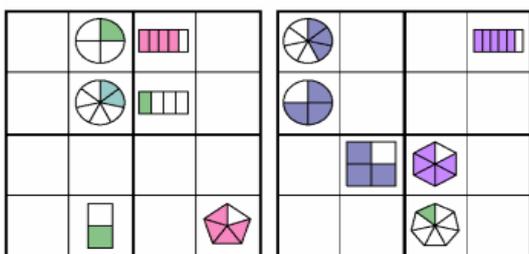
1. La fracción $1/7$ se relaciona con la cabeza y el total del cuerpo. Por tanto, la cabeza es $1/7$ de él, es decir, cabe 7 veces en el largo del cuerpo.
2. La fracción $1/3$ tiene varios ejemplos. La cara tiene el largo de la palma de la mano, correspondiendo $1/3$ de esa medida a la frente, $1/3$ al largo de la nariz y $1/3$ desde la caba al mentón.
3. Otra relación es que el ancho de la cabeza es $1/3$ del ancho de la espalda.



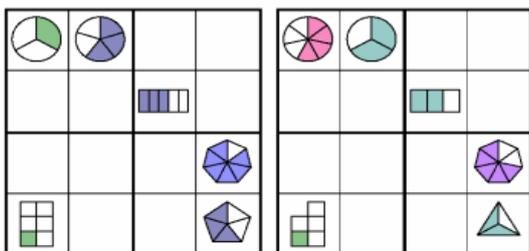
Un juego antes de comenzar para despertar el interés. Sesión 9 (10 minutos).

El objetivo del juego de Sudoku es completar los casilleros en blanco con fracciones de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

1.a. Sudoku Fracciones (fractions)



1. Ninguna columna (vertical) tenga números repetidos
2. Ninguna fila (horizontal) tenga números repetidos
3. Ningún cuadrado interior 2x2 (marcado con bordes gruesos) tenga números repetidos



La adaptación de este juego para enseñar fracciones en matemáticas consiste en utilizar representaciones gráficas de las fracciones propias en las casillas. Las fracciones son representadas de cuatro maneras diferentes usando: tortas, polígonos, barras, y bloques. Además tienen un código de color.



Al intentar solucionar los juegos los estudiantes deberán alternar mentalmente entre las representaciones gráficas y simbólicas de las fracciones.

El mismo juego de Sudoku da retroalimentación sobre si una fracción está colocada en una celda correcta o no, ya que, de colocarse una fracción en una casilla incorrecta, otras columnas, o filas, o cuadrados no podrán ser completados.

Como es de esperar, esta actividad no se va a poder resolver en 10 minutos, pero lo que se pretende con este popular juego es conseguir captar la atención de los niños para que, una vez empezada en clase, luego lo resuelvan y practiquen en casa. Además de este sudoku, se les pueden proporcionar muchos más a aquellos estudiantes que así lo soliciten.

Resolución de ejercicios en clase para ir asentando todos los conocimientos relacionados con el tema de las Fracciones (35 minutos).

Hasta ahora los ejercicios realizados en las sesiones 5, 6 y 7 eran científicos en el ámbito de las matemáticas. En estas últimas dos sesiones se procurará que estas aplicaciones y algoritmos se apliquen a problemas relacionados con la vida cotidiana y que el nivel de complejidad cubra tanto los la reproducción como la de conexión.

Algunos ejemplos podrían ser:

Ejercicio 1. De los animales del zoo, $\frac{2}{3}$ son mamíferos y $\frac{1}{5}$ aves. ¿Qué fracción de los animales del zoo representan conjuntamente los mamíferos y las aves? ¿Cuántos hay de otras familias?

Ejercicio 2. María echa cuentas: Si gasta la mitad de su dinero en una entrada para el cine y $\frac{3}{8}$ en invitar a sus amigos, le quedan 3 euros ¿Cuánto dinero tiene?

Ejercicio 3. Durante un viaje, un viajante consume $\frac{1}{8}$ de la gasolina que lleva en el depósito de su vehículo. En un segundo viaje consume $\frac{2}{3}$ de lo que le quedaba. Sabe que le quedan en el depósito 20 litros. ¿Cuántos litros puede llevar en el depósito?

Ejercicio 4. Ana ha comprado, con $\frac{1}{8}$ del dinero que llevaba, un ordenador que costaba 1600 euros. Posteriormente entró en una tienda de rebajas y se gastó $\frac{2}{3}$ del dinero que le quedaba. ¿Cuánto dinero llevaba? ¿Cuánto dinero se gastó en la segunda compra?

Ejercicio 5. Los $\frac{1}{5}$ de los ingresos de una comunidad de vecinos se emplean en gasóleo, $\frac{1}{3}$ se emplean en electricidad, $\frac{1}{12}$ en la recogida de basuras, $\frac{1}{4}$ en mantenimiento del edificio y el resto en limpieza.

- a) ¿Cuánto se emplea en limpieza?
- b) Si la comunidad dispone de 5500 euros, ¿cuánto corresponde a cada actividad?

SESIÓN 10

En esta última sesión se realizará una prueba escrita en la que se procurará recoger todos los puntos que se han ido explicando a lo largo del tema. Dicha prueba contará tanto de ejercicios pertenecientes al ámbito científico puramente matemático así como a otros ámbitos.

A continuación se propone un examen tipo:

- 1) Explica en 10 líneas lo que más te haya llamado la atención acerca de lo que has investigado para tu trabajo de Evolución Histórica de las Fracciones.
- 2) De la expresión que tiene en mente el Sr. Federico, conteste lo siguiente:
 - a. Identifique el numerador y el denominador.
 - b. ¿Qué significa el numerador?
 - c. ¿Qué significa el denominador?
 - d. Si invierte la posición del numerador y del denominador, ¿qué ocurre?

3) Halle una fracción equivalente a $\frac{12}{36}$ tal que:

- a. El numerador sea 3.
- b. El denominador sea 5 veces el denominador original.
- c. El numerador valga la tercera parte del numerador original.

4) Determina el valor de cada literal para que las equivalencias indicadas sean ciertas:

$$\left(\frac{2}{7} = \frac{m}{21}\right)$$

$$\left(\frac{-5}{7} = \frac{50}{r}\right)$$

$$\left(\frac{81}{y} = \frac{27}{-2}\right)$$

5) Resuelve las siguientes operaciones con fracciones:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{4}{5} - \frac{7}{3}\right) =$$

$$\left(2 - \frac{7}{3}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{8}\right) =$$

- 6) Un comerciante ha comprado 800 kg. de patatas, $120\frac{1}{9}$ kg. de trigo y $170\frac{3}{4}$ kg. de arroz, ¿cuántos kilogramos de mercancía ha comprado en total?
- 7) En un partido de baloncesto, un jugador hizo $\frac{1}{8}$ del total de canastas del partido; otro jugador hizo los $\frac{2}{8}$ y un tercer jugador hizo los $\frac{3}{8}$. El resto de los jugadores del equipo hicieron 24 canastas. ¿Qué fracción del total de canastas hicieron los 3 jugadores? ¿Qué fracción los demás? ¿Cuántas canastas hizo el equipo?
- 8) La distancia de una ciudad a otra es de 210 km. Si el primer día Hugo recorre los $\frac{3}{7}$ de esa distancia, el segundo día los $\frac{2}{21}$ y el tercero los $\frac{7}{30}$, ¿a qué distancia estará del punto de llegada?
- 9) Dado un cordel, Juan toma la mitad; de lo que queda Pedro toma la mitad; de lo que queda, María toma la mitad; de lo que queda Carmen toma dos de cinco partes y finalmente quedan 30 cm. ¿cuál era la longitud del cordel?

Tal y como se puede observar, en este examen se valoran también ciertos aspectos de la teoría y no se limita a la resolución de problemas, lo cual puede resultar interesante para que los alumnos aprendan a que en Matemáticas también es necesario estudiar y comprender la parte teórica, no siendo suficiente con realizar la resolución de problemas. Además, con la primera pregunta se pretende investigar acerca de si los estudiantes realmente se han interesado por

aprender con el trabajo que se les propuso en la primera sesión y simplemente se han limitado a copiar algún documento de internet.

Además, es un examen cuyo nivel de dificultad hace posible que lo puedan aprobar todos los alumnos si han estudiado un poco y se han interesado por el tema y que permite que aquellos estudiantes que pueden ir un poco más allá, tengan la oportunidad de demostrar sus conocimientos y obtener una buena calificación.

En el siguiente apartado se tratarán los aspectos referentes a la evaluación del tema de las Fracciones, indicando la valoración y los criterios que se seguirán a la hora de puntuar la prueba escrita realizada durante esta sesión.

5. EVALUACIÓN DEL TEMA DE FRACCIONES

A medida que las Matemáticas han ido evolucionando se han convertido en un lenguaje universal y sumamente eficaz, que sigue desarrollándose con la resolución de problemas prácticos.

Adquirir conocimientos matemáticos supone no sólo llegar a conseguir resultados finales y concretos, sino dominar todo el proceso seguido hasta obtenerlos.

Las Matemáticas tienen un valor formativo que trasciende su propio ámbito: fomentan en el alumnado la creatividad, los hábitos de indagación, la visión amplia de la realidad o la capacidad de enfrentarse a situaciones desconocidas e imprevistas.

La evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Requiere obtener información de manera sistemática, que permita al profesor/a emitir un juicio valorativo sobre el ritmo del proceso de aprendizaje, en aspectos parciales y globales del mismo.

Evaluar no es tarea fácil, sobre todo en lo relativo a aprendizajes a largo plazo. La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos, como los actitudinales y los procedimientos de tipo general. Esto último modifica la elección de técnicas e instrumentos aconsejables para la evaluación.

Para describir el sistema de evaluación que se va a emplear en la presente propuesta de unidad didáctica, en primer lugar se enuncian los criterios de evaluación seleccionados, a continuación se detallan los instrumentos de evaluación que emplearemos y, finalmente, se describen los criterios de calificación de algunos de esos instrumentos.

5.1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Terminada la unidad didáctica, será muy interesante obtener información sobre acerca del grado de cumplimiento de las destrezas, razonamientos y estrategias que se numeraron en apartados anteriores de este estudio, así como el cumplimiento de los objetivos, que nos dan una idea más detallada de lo que se esperaba conseguir con el tema y que, en última instancia, colaboran en el desarrollo de las competencias PISA, tal y como se indicaba en las tablas correspondientes.

5.2. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

La variedad de aspectos a evaluar y su diferente nivel de complejidad, hace que no se deba pretender evaluar todo a través de un mismo tipo de prueba. Por tanto, se emplearán diversos instrumentos de recogida de información, como son los siguientes:

1. Durante todo el desarrollo de la unidad didáctica, se llevará a cabo una evaluación continua en la que se valorará la participación en el aula y la realización de las tareas propuestas para resolver en casa, así como la actitud y el comportamiento presentados en clase
2. Se tendrá en cuenta la corrección de los trabajos de los alumnos, individuales o colectivos.

3. Se realizará una prueba escrita sin aviso previo cuando se hayan consumido la mitad de las sesiones, que no contará para la nota final y con el único fin de detectar posibles errores de concepto, así como carencias en los procedimientos.
Si el resultado de esta prueba fuera positivo, se seguirá trabajando como se venía haciendo desde el principio.
Si por el contrario el resultado fuese desfavorable, se intentará, por una parte, incidir de nuevo en los contenidos, y por otra, se dedicará la mitad de una sesión a resolver las dudas que los alumnos planteen, y la otra mitad a que resuelvan ejercicios en grupo para que puedan ayudarse entre ellos
4. Cuando se haya desarrollado la unidad didáctica completa, los alumnos fijarán una fecha para la realización de un examen sobre la misma. Además, existirá la posibilidad de hacer recuperaciones. El aprobado del tema supondrá que el alumno ha alcanzado los objetivos fijados.

5.3. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

La nota final del tema se confeccionará con los siguientes criterios:

1. Examen: 60%
2. Trabajo diario, participación y actitud: 20%
3. Trabajo escrito: 20%

A la hora de calificar la prueba, se tendrán en cuenta:

En relación con los conceptos:

1. Comprensión, reconocimiento y utilización del lenguaje matemático.
2. Asimilación y aplicación a la práctica de los contenidos trabajados.
3. Comprensión y explicación de los problemas planteados.

En relación con los procedimientos:

1. Expresión oral correcta y adecuada.
2. Uso correcto de la simbología matemática y conocimiento de las propiedades a la hora de operar y simplificar las expresiones matemáticas.
3. Utilización adecuada de los diversos sistemas de representación. Relacionar correctamente expresiones analíticas y gráficas.
4. Planteamiento y resolución de problemas.
5. Autonomía en el aprendizaje.
6. Presentación a tiempo de trabajos y cuaderno. En los trabajos se tendrán en cuenta la originalidad y el nivel de profundidad alcanzado al realizarlo, puntuando positivamente la utilización de varias fuentes diferentes para elaborarlo.

En relación con las actitudes:

1. Aportaciones e iniciativas en el aula.
2. Orden y limpieza en la presentación de trabajos.
3. Interés y curiosidad por la matemática y la expresión gráfica.

6. ESTUDIO EMPÍRICO CON ESCOLARES DE 1º Y 2º DE ESO: FRACCIONAR Y REPARTIR

Con el fin de enriquecer el análisis que se iba a realizar sobre las fracciones, se pensó que podía resultar muy interesante llevar a cabo un estudio empírico que permitiera obtener información real acerca de cómo entienden, dominan y manejan los niños las fracciones.

Buscando bibliografía al respecto, se pudo comprobar que una investigadora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Elena Castro, ya había realizado en 2010 un estudio el cual, a pesar de estar dirigido a maestros en formación podía resultar muy interesante para el caso de los alumnos de Secundaria ya que la finalidad del mismo es muy parecida a la que se estaba buscando (Castro, 2010).

Es por ello que se decidió hacer una réplica del mismo.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de realizar dicho estudio con la salvedad de que, en lugar de estar dirigido hacia los maestros en formación, se ha aplicado sobre el reverso de la moneda, es decir, sobre estudiantes de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Con eso se pretende introducir un aspecto novedoso que busca un mayor enriquecimiento del conocimiento acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, y más concretamente, de las fracciones.

El trabajo de Castro (op. cit) realiza una contribución desde un punto de vista empírico acerca del dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial de algunos de los significados de las fracciones, como un conocimiento previo para su abordaje en el aula de magisterio.

Por tanto, lo que ahora se pretende es observar cuáles son los conceptos que los estudiantes de 1º y 2º de la ESO han adquirido y asimilado una vez que ya han estudiado el tema con sus profesores. Al igual que el trabajo en el que se basa, la idea principal de este estudio es describir las ideas, imágenes y conceptos sobre fraccionar y repartir que tienen los alumnos de 1º y 2 de Secundaria una vez que ya han estudiado las fracciones en sus respectivos cursos. Para ello:

1. Se ha empleado el cuestionario elaborado por Castro (2010) con el que se elicitán ideas, imágenes y conceptos sobre las nociones “fraccionar” y “repartir”.
2. Identificar y categorizar los significados que sobre “fraccionar” y “repartir” sustentan los estudiantes de Secundaria, en función del campo conceptual de las fracciones.
3. Analizar las relaciones que surgen entre las eventuales categorías establecidas para interpretar la diversidad de significados sobre “fraccionar” y “repartir”, teniendo en cuenta aspectos verbales y gráficos.

6.1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Tal y como indica se en el trabajo de partida, la bibliografía sobre fracciones dentro de éste ámbito de estudio, da a entender que hay muchos aspectos que no se han tratado, salvando puntos muy concreto. Así pues, es de esperar que estudios de tipo empírico, que además, son menos abundantes, enriquezcan el conjunto de estudios teóricos ya existentes.

Dicho estudio da importancia a tres aspectos fundamentales, en torno a los cuales gira la investigación:

1. Significado.
2. Fenomenología.
3. Sistemas de Representación.

Todos estos puntos se han tratado en mayor o menor medida en apartados anteriores del presente trabajo, por lo que puede resultar más interesante no extenderse más en ellos para pasar a recoger a continuación una de las conclusiones que obtuvo Castro (2010) en su investigación tras repasar la bibliografía existente: *“La mayoría de los resultados de las investigaciones muestran que los profesores en formación no poseen el conocimiento suficiente sobre las fracciones, especialmente en las representaciones e interpretaciones del concepto”*.

Se busca, por tanto, ver la repercusión que tiene esta supuesta carencia que puede llegar a tener el personal docente y en consecuencia qué es lo que transmiten a sus alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

6.2. DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

Lo que se pretende con este estudio es investigar qué nociones y qué formas de representación tienen los estudiantes de 1º y 2º de Secundaria sobre las fracciones una vez que ya las han estudiado a lo largo del curso.

Para llevar a cabo esta investigación se ha empleado el cuestionario de respuesta abierta elaborado por Castro (2010) con el que se va a tratar de describir, analizar y organizar los diferentes conceptos e ilustraciones sobre la idea de fraccionar y repartir que tienen los estudiantes de estos cursos. Las cuestiones se formularon para ser respondidos por maestros en formación inicial, aunque en este caso, como es de esperar, son los escolares de Secundaria los que han proporcionado las respuestas. Dicho cuestionario consta de los siguientes apartados:

ACTIVIDAD 1. ¿Qué es fraccionar?

1. Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.
2. Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar.

ACTIVIDAD 1. ¿Qué es repartir?

1. Explica verbalmente qué entiendes por repartir.
2. Haz un dibujo que muestre qué es repartir.

Además, resulta interesante hacer una diferenciación entre los 31 alumnos de 1º y los 27 de 2º ya que no sólo hay que contar con el año de diferencia y por tanto el diferente grado de profundidad en el estudio de la materia, sino con que ambos grupos han tenido profesores distintos (al menos en lo que a Educación Secundaria se refiere).

Tal y como ocurre en el trabajo de origen, el análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes.

6.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Análisis a la respuesta 1.1. Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar

Tomando la clasificación llevada a cabo en el trabajo de partida, se establecen tres temas principales: “Dividir”, “Partir” y “Repartir” que dan lugar a una serie de categorías y subcategorías:

1. DIVIDIR
 - Dividir
 - Dividir en partes
 - Dividir en partes y coger
 - Dividir en partes iguales
 - Dividir en partes iguales y coger
2. PARTIR
 - Partir
 - Partir en partes iguales
3. REPARTIR
 - Repartir
 - Repartir equitativamente
4. COMBINACIONES
 - Dividir + partir
 - Dividir + repartir
 - Partir + repartir
5. OTROS

Entre las tres categorías principales encontradas en el conjunto de datos, al igual que ocurría con las respuestas proporcionadas por los maestros en formación, los alumnos del primer ciclo de Secundaria se decantan por la primera. En el conjunto de ambos cursos, Dividir aparece en el 41,38% de las respuestas, seguido de Partir, con un 29,31 % y finalmente Repartir es la opción menos popular con tan sólo un 3,45% de respuestas.

No obstante, si se asignan a cada una de las categorías aquellos porcentajes en los que aparecen combinados con alguna otra opción se obtiene lo siguiente:

- Dividir.....48,28%
- Partir.....37,93%
- Repartir.....8,62%

Sin embargo, estos porcentajes cambian si se analizan ambos grupos por separado:

1º de ESO

- Dividir.....48,39%
- Partir.....58,06%
- Repartir.....6,45%

2º de ESO

- Dividir.....48,15%
- Partir.....14,81%
- Repartir.....11,11%

A continuación se muestra una tabla donde se recogen los distintos resultados:

	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Nº Respuestas	%	Nº Respuestas	%	Nº Respuestas	%
1. DIVIDIR						
• Dividir	2	6,45	4	14,81	6	10,34
• Dividir en partes	1	3,23	2	7,41	3	5,17
• Dividir en partes y coger	1	3,23	0	0,00	1	1,72
• Dividir en partes iguales	7	22,58	6	22,22	13	22,41
• Dividir en partes iguales y coger	1	3,23	0	0,00	1	1,72
• Total	12	38,71	12,00	44,44	24,00	41,38
2. PARTIR						
• Partir un todo	5	16,13	2	7,41	7	12,07
• Partir en partes iguales	8	25,81	2	7,41	10	17,24
• Total	13	41,94	4,00	14,81	17,00	29,31
3. REPARTIR						
• Repartir	0	0,00	2	7,41	2	3,45
• Repartir equitativamente	0	0,00	0	0,00	0	0,00
• Total	0	0,00	2,00	7,41	2,00	3,45
4. COMBINACIONES						
• Dividir + partir	3	9,68	0	0,00	3	5,17
• Dividir + repartir	0	0,00	1	3,70	1	1,72
• Partir + repartir	2	6,45	0	0,00	2	3,45
• Total	5	16,13	1,00	3,70	6,00	10,34
5. OTROS	1	3,23	8	29,63	9	15,52
TOTAL	61	196,774194	46	170,37037	107	184,482759

Una vez analizados los datos correspondientes a esta primera pregunta, lo primero que hay que hacer notar es que existen bastantes diferencias entre ambos cursos, habiendo una mayor homogeneidad en las respuestas de 1º de ESO en relación con las de 2º de ESO a pesar de que en 1º de ESO no termina de haber una tendencia clara y llama la atención que en este curso aislado la opción de partir tiene una mayor afluencia.

Es especialmente interesante que, independientemente de cómo completaran las respuestas, 10 de los 31 alumnos de 1º de ESO hayan utilizado en su contestación la expresión “parte de un todo”. También hay que destacar que la gran mayoría se han decantado por dividir o partir en partes iguales, lo cual implica un mayor nivel de concreción al expresar cómo son las partes y sólo un alumno llega a la idea más elaborada “Dividir en partes iguales y coger”, que es la significación más precisa ya que la fracción es considerada como objeto del resultado de dos acciones equitativas y sucesivas donde se detalla cómo son las partes y qué se hace con ellas.

Esta mayor homogeneidad no resulta sorprendente ya que al haber tenido la oportunidad de asistir a las clases de este grupo con su profesor, he podido observar que es muy metódico y que normalmente comienza las clases haciendo un repaso de conceptos anteriores (a veces del tema que están tratando en ese momento y en otras ocasiones de todo el curso) mediante preguntas que los niños deben contestar en voz alta para toda la clase y les va corrigiendo hasta que consigue una respuesta con un lenguaje matemático que le resulta satisfactoria.

En 2º de ESO los resultados son de índole diferente, destacando que son mayoría los alumnos (14,81%) los que dan como respuesta “Dividir”, que es una significación imprecisa donde fraccionar se presenta como una acción, mediante un verbo único equivalente.

De manera más general, el 48,15% de la clase incluye en su respuesta dicho término por lo que aparentemente parece que hay un mayor acuerdo. Sin embargo, se puede apreciar que dentro de esta categoría genérica se produce una mayor dispersión en cuanto a las opciones existentes, los que da lugar a una mayor heterogeneidad de respuestas.

También hay que señalar que ningún alumno llega al significado más completo de “Dividir en partes iguales y coger” y que son 8 los alumnos de 2º de ESO los que dan respuestas que se puede afirmar que son incorrectas frente a 1 alumnos de 1º de ESO.

Análisis a la respuesta 1.2. Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar.

Tal y como se hace en el estudio originario, el criterio seguido para esta clasificación, es el tipo de figura y el número de figuras presentes en la ilustración, pudiendo presentarse divididas y/o divididas y sombreadas.

1. CONTINUO

Lineal

Área:

- Rectángulo
- Círculo
- Rectángulo y círculo
- Otras figuras

2. DISCRETO

3. OTROS

A continuación se muestran los resultados:

	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Nº Respuestas	%	Nº Respuestas	%	Nº Respuest	%
1. CONTINUO						
Lineal	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Área:						
• Rectángulo	7	22,58	9	33,33	16	27,59
• Círculo	21	67,74	16	59,26	37	63,79
• Rectángulo y círculo	1	3,23	0	0,00	1	1,72
• Otras figuras	0	0,00	1	3,70	1	1,72
2. DISCRETO	0	0,00	1	3,70	1	1,72
3. OTROS	2	6,45	0	0,00	2	3,45
TOTAL	31	100,00	27	100,00	58,00	100,00

Al igual que en el caso de los maestros en formación inicial, la categoría área agrupa el mayor número de respuestas, concretamente, el 94,83% lo que da a entender que es el sistema que mejor entienden los estudiantes de Secundaria y el que van a recordar durante más tiempo.

Ahora bien, a diferencia de lo que ocurre con los maestros, las respuestas de los alumnos de Secundaria no incluyen contestaciones dentro de la categoría "Continuo y discreto" por lo que se hace desaparecer y en cuando a la variedad de respuestas dadas en la categoría "Área", las respuestas son más homogéneas, pudiéndose agrupar todas ellas en tan sólo 5 categorías, en lugar de las 8 categorías que podrían apreciarse en las respuestas de los maestros en formación:

ÁREA	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Recuento	%	Recuento	%	Recuento	%
Una figura dividida.	12	41,38	12	46,15	24	43,64
Una figura dividida y una parte coloreada.	14	48,28	9	34,62	23	41,82
Una figura + una figura dividida.	3	10,34	3	11,54	6	10,91
Una figura + una figura dividida con partes separadas.	0	0,00	1	3,85	1	1,82
Una figura + una figura dividida + una figura dividida con partes separadas.	0	0,00	1	3,85	1	1,82
TOTAL	29	100	26	100	55	100

El 85,45% de los alumnos se decantan por una figura dividida o bien una figura dividida y una parte coloreada, que es el nivel más sencillo. Un 10,91% va un poco más allá ya que dibujar dos figuras, una primera que representa la unidad y otra que indica la acción de dividir en partes. Finalmente, tan sólo el 1,82% llega a un nivel superior, en el que no sólo se toma la unidad y posteriormente se divide, sino que finalmente toma una parte.

Finalmente, cabe decir que, dentro de las diferencias mencionadas, las respuestas gráficas tanto de los maestros en formación como las de los alumnos de secundaria, cumplen unos porcentajes bastante similares.

Análisis a la respuesta 2.1. Explica verbalmente qué entiendes por repartir

En esta ocasión, la clasificación también se realiza según tres temas principales: "Repartir y sus sinónimos", "Términos relacionados con fraccionar" y "Relacionar y sus sinónimos".

Más concretamente, Castro elaboró en su trabajo las siguientes listas:

1. SINÓNIMOS DE REPARTIR

- Dar
- Dar equitativamente
- Dar equitativamente o no
- Asignar
- Asignar equitativamente
- Asignar equitativamente o no
- Distribuir
- Distribuir equitativamente
- Distribuir equitativamente o no

2. TÉRMINOS RELACIONADOS CON FRACCIONAR

- Dividir
- Dividir en partes iguales

- Dividir en partes iguales o no
- Fraccionar
- Fraccionar en partes iguales
- Fraccionar en partes iguales o no
- Partir
- Partir en partes iguales
- Partir en partes iguales o no

3. SINÓNIMOS + TÉRMINOS RELACIONADO CON FRACCIONAR

- Dividir/fraccionar + dar/distribuir
- Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes iguales
- Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes iguales o no

4. RELACIONAR

5. OTROS

Y a raíz de estas listas se hace una agrupación, cuyos resultados quedan reflejados en la siguiente tabla:

	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Recuento	%	Recuento	%	Recuento	%
1. REPARTIR						
• Sinónimos de repartir	4	12,90	5	18,52	9	15,52
• Sinónimo + equitativamente	6	19,35	7	25,93	13	22,41
• Sinónimo equitativamente o no	4	12,90	1	3,70	5	8,62
2. FRACCIONAR						
• Dividir / fracionar/ partir	5	16,13	2	7,41	7	12,07
• Dividir / fracionar/ partir en partes iguales	7	22,58	5	18,52	12	20,69
• Dividir / fracionar/ partir en partes iguales o no	0	0,00	0	0,00	0	0,00
3. COMBINACIÓN DE REPARTIR Y FRACCIONAR						
• Dividir / fracionar/ dar / distribuir	3	9,68	1	3,70	4	6,90
• Dividir / fracionar/ dar / distribuir en partes iguales	1	3,23	4	14,81	5	8,62
• Dividir / fracionar/ dar / distribuir en partes iguales o no	0	0,00		0,00	0	0,00
4. OTROS						
	1	3,23	2	7,41	3	5,17
TOTAL	31	100	27	100	58	100

Como novedad respecto a los resultados obtenidos con los maestros en formación, desaparece la categoría "Relacionar" puesto que no hay resultados dentro de la misma y una de las subcategorías de "Fraccionar" se queda vacía.

Tal y como se puede apreciar, a diferencia de lo que ocurría en la pregunta 1.1., en esta ocasión no se habla tanto de partes o de coger, pero sí que está muy presente la diferencia entre

reparto equitativo y reparto no equitativo, cosa que no ocurría con las fracciones donde se daba por hecho que todas las partes eran iguales.

Las respuestas de los alumnos de secundaria con bastante más heterogéneas que las correspondiente a la pregunta 1.1. A grandes rasgos, los porcentajes asignados a cada categoría son:

- Repartir.....46,55%
- Fraccionar.....32,76%
- Combinación.....18,22%

Nuevamente, estos porcentajes cambian si se analizan ambos grupos por separado, aunque no se aprecian diferencias remarcables:

1º de ESO

- Repartir.....45,15%
- Fraccionar.....38,71%
- Combinación.....12,91%

2º de ESO

- Repartir.....48,15%
- Fraccionar.....25,93%
- Combinación.....18,51%

En cuanto a los niveles de complejidad de la respuesta, un 34,49% de los alumnos se limitan a dar una respuesta determinada por un verbo, ya sea de la primera categoría, de la segunda, o de una combinación. La mayoría, un 51,72% añaden la idea de equidad, completando así la definición y finalmente, tan sólo un 8,62% hablar de reparto equitativo o no, que sería el significado más completo.

Análisis a la respuesta 2.2. Haz un dibujo que muestre qué es repartir.

La clasificación empleada en esta pregunta es la misma que la correspondiente a su pregunta homóloga:

1. CONTINUO

Lineal

Área:

- Rectángulo
- Círculo
- Rectángulo y círculo
- Otras figuras

2. DISCRETO

3. OTROS

	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Nº Respuest	%	Nº Respuest	%	Nº Respuest	%
1. CONTINUO						
Lineal	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Área:						
• Rectángulo	1	3,23	1	3,70	2	3,45
• Círculo	4	12,90	1	3,70	5	8,62
• Rectángulo y círculo	0	0,00	0	0,00	0	0,00
• Otras figuras	1	3,23	0	0,00	1	1,72
2. DISCRETO	23	74,19	24	88,89	47	81,03
3. OTROS	2	6,45	1	3,70	3	5,17
TOTAL	31	100,00	27	100,00	58,00	100,00

Tal y como se puede apreciar, la respuesta más popular es la categorizada dentro del grupo "Discreto", con un 81,03%, seguida muy de lejos por la subcategoría "Área", que cuenta tal solo con un 13,79% de las respuestas.

Por ello, más que realizar una categorización de ambos, se va a proceder a establecer una clasificación del grupo "Discreto", la cual queda reflejada en la siguiente tabla:

DISCRETO	1º de ESO		2º de ESO		Ambos cursos	
	Recuento	%	Recuento	%	Recuento	%
Conjunto total.	1	4,35	0	0,00	1	2,13
Conjunto dividido.	3	13,04	3	12,50	6	12,77
Conjunto total + conjunto dividido.	6	26,09	1	4,17	7	14,89
Conjunto total + personas.	1	4,35	4	16,67	5	10,64
Conjunto dividido + personas.	4	17,39	5	20,83	9	19,15
Conjunto total + conjunto dividido + personas.	8	34,78	11	45,83	19	40,43
TOTAL	23	100	24	100	47	100

Estas subcategorías se pueden agrupar de arriba hacia debajo de 2 en 2 de modo que el nivel de complejidad de la representación va aumentando.

En este caso, la mayoría de los estudiantes (40,43%) han optado por la presentación más compleja en la que quedan representados un conjunto total, ese mismo conjunto dividido y personas. Además, hay que añadir que muchos de los escolares se ayudan de globos o bocadillos en los que las personas que han dibujado explican lo que están haciendo.

La diferencia de porcentaje existente entre los alumnos de 1º y 2º de ESO en esta subcategoría (34,78% y 45,83% respectivamente) puede reflejar un mayor nivel de madurez en estos últimos debido al año de diferencia que existe entre ellos y a que este concepto no se reitera tanto como aquel de fraccionar en las clases.

6.4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EMPÍRICO

En relación con la primera pregunta, “Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar”, los resultados pueden resultar desconcertantes puesto que los alumnos de 2º de ESO están en un nivel más avanzado y por tanto deberían tener más claro cuál es el concepto de fracción y sin embargo en el estudio realizado, esto no ocurre así, sino que se buena parte se queda en las definiciones más imprecisas.

Llegados a este punto, para poder dar una explicación coherente y fundamentada habría que realizar un estudio más profundo con los alumnos de ambos cursos e investigar qué factores han podido influir en la diferencia de resultados en ambos grupos. Entre otras cuestiones habría que obtener datos sobre los libros de texto que han utilizado, si sus profesores han sido diferentes o si han tenido al mismo, de qué Centros proceden, cuándo estudiaron por primera vez las fracciones, si se trata de alumnos más o menos estudiosos, etc..

Los resultados a la cuestión “Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar” son acordes con la respuesta a la primera pregunta, ya que cuanto más compleja es la respuesta, más complejo deberá ser el dibujo que acompañe a dicha respuesta. Por tanto, teniendo en cuenta que la mayoría de las respuestas son del tipo “dividir”, “dividir en partes” “dividir en partes iguales”, “partir un todo” y “partir en partes iguales” (un 67,24% entre todas ellas), es lógico que el tipo de figuras asociadas correspondan a figuras pertenecientes al nivel más sencillo. Análogamente, tan sólo el 1,72% llega hasta la definición más completa “dividir en partes iguales y coger”, que se corresponde con un 1,82% de representaciones más complejas, en las que precisan de 3 figuras.

En cuanto a la tercera pregunta, “Explica verbalmente qué entiendes por repartir”, es posible que la diferencia existente entre las respuestas a qué es fraccionar y qué es repartir se encuentre en que los escolares tratan de dar una respuesta más reglada a la primera puesto que es algo sobre lo que han hecho mucho hincapié sus profesores en clase, mientras que cuando se les pregunta sobre qué es repartir, las respuestas son más intuitivas, incluyen ejemplos sobre su día a día, e incluso algunos de los estudiantes hace valoraciones sobre la justicia e injusticia de que el reparto sea o no equitativo.

Finalmente, tal y como ocurre en el estudio de Castro con maestros en formación, en las respuestas a la cuarta pregunta, “Haz un dibujo que muestre qué es repartir”, se produce una cierta correspondencia entre aquellas respuestas categorizadas dentro de “Repartir” en la pregunta 2.1. y el tipo de representación. Como era de esperar, el sistema de representación más empleado es el discreto y dentro de éste, abundan las ilustraciones con personas que “reparten” normalmente caramelos, chucherías, canicas...

Una vez analizados los datos lo que se plantea es cómo podría influir esta propuesta de Unidad Didáctica en las contestaciones de futuros alumnos de Secundaria. Pues bien, es muy posible que la diferencia que puede marcar el presente trabajo esté relacionada con el hecho de aplicar un enfoque mucho más práctico. Se van a emplear herramientas tecnológicas en 4 de las sesiones, materiales manipulativos en 1 y se van a introducir juegos en 2, lo que hace que 7 de las 9 sesiones se caractericen por tener un aspecto novedoso, lo que ayudará a los estudiantes a tener una visión mucho más palpable y gráfica de lo que son las fracciones, lo que implica una mejor asimilación de los conceptos. Está demostrado que para captar la atención de los alumnos hay que cambiar los métodos tradicionales e introducir otros nuevos, lo que no quiere decir, por supuesto, que los sustituyan, sino que más bien los complementan.

7. CONCLUSIONES

Los organizadores del currículo que propone Luis Rico (2007) (Errores y dificultades detectados en el aprendizaje de las matemáticas; Diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual; Fenomenología de los conceptos implicados; Diversidad de los materiales de tipo manipulativos y de los recursos; Evolución histórica de cada campo e, incluso de cada concepto) y su articulación y organización en términos del análisis didáctico permiten llevar a cabo un análisis de los contenidos de las matemáticas al servicio de la organización de su enseñanza en el sistema educativo. Este análisis forma parte ineludible del trabajo que los profesores de matemáticas deben realizar en sus tareas de planificación de unidades didácticas, y es por ello que son necesarios unos organizadores, los mencionados u otros alternativos.

En la presente Unidad Didáctica se ha tratado de cubrir todos y cada uno de ellos, buscando una planificación detallada y justificada del tema de fracciones que pueda solventar las posibles deficiencias que en ocasiones presentan las programaciones escolares.

Vista la importancia que tiene las fracciones en el Currículum de Secundaria, hasta el punto de estudiarse en todos los cursos, y tras realizar un estudio empírico con alumnos de 1º y 2º de ESO, cabe la posibilidad de preguntarse por qué los alumnos tienen las dificultades que tienen.

Entre las distintas respuestas, podría plantearse el hecho de que en ocasiones, por la propia forma de ser de esta ciencia, los estudiantes se quejan de que las Matemáticas les resultan difíciles y tediosas. No las entienden y se desaniman por lo que optan por abandonar y dedicarse a otras cosas que no requieren tanta abstracción.

En relación con los resultados obtenidos en el estudio realizado, buena parte de los estudiantes se defienden y son capaces de dar definiciones coherentes, aunque la mayoría de las respuestas no terminan de ser completas, siendo más bien imprecisas.

Pues bien, llegados a este punto soy partidaria de defender que los profesores pueden y deben romper la monotonía en la que es tan fácil caer en esta asignatura. Las estrategias didácticas de los profesores no tienen por qué ser rutinarias y mucho menos tediosas. Un buen profesor debe ser capaz de estimular a sus alumnos introduciendo aspectos novedosos que despierten su interés. Es por ello que, como se comentaba en el apartado anterior, en la presente Unidad Didáctica se alterna la enseñanza tradicional en la que se emplea la pizarra y las explicaciones de profesor con el uso de herramientas tecnológicas, materiales manipulativos y la realización de juegos que permitirán que los alumnos vean las matemáticas, y más concretamente las fracciones, como algo que puede llegar a ser divertido.

Desde mi punto de vista, creo que el hecho de emplear distintos materiales y recursos a la hora de explicar el tema de fracciones permitirá que los alumnos no se limiten tan sólo a uno de los posibles significados del concepto (tal y como ocurre en los resultados del estudio empírico, donde la mayoría de los estudiantes encuestados recurren a sistemas de representación muy similares) sino que permitirá un mayor enriquecimiento y un aprendizaje más profundo.

Sin embargo, los juegos o el uso de ordenadores u otros materiales tampoco deben convertirse en algo que distraiga a los estudiantes, ya que cuando ocurre esto, pierden su función didáctica. Por tanto, es muy importante analizar y describir cuidadosamente qué es lo que se pretende lograr en cada sesión cuando se introduce alguno de estos materiales y no emplearlos simplemente porque sí ya que dejarían de ser algo novedoso y atractivo, pudiendo llegar a obtenerse resultados contraproducentes.

No obstante, el uso de los mismos de una forma coherente y responsable puede lograr que los niños aprendan mientras “juegan” de una forma natural y sin tanto esfuerzo o al menos sin tanto desagrado como podría requerir atender a una lección más tradicional, y lo que es más importante, en muchas ocasiones este aprendizaje será mucho más significativo y no se olvidará tan fácilmente.

Otro punto muy importante en el Diseño de la presente Unidad Didáctica es que se ha buscado un acercamiento a la vida cotidiana de los alumnos y de la sociedad en general, con problemas que no se limitan al ámbito científico de las matemáticas (que también los hay, aunque se ha procurado introducir algunas de las herramientas novedosas mencionadas a la hora de abordar ese tipo de ejercicios para hacerlos más atractivos), sino que se introducen otros ámbitos fenomenológicos que pueden dar respuesta a esa pregunta tan escuchada en las aulas de secundaria: “¿pero esto sirve para algo?”.

Se pretende, por tanto, introducir esa componente práctica que haga a los niños comprender que las matemáticas van más allá de algo a lo que se ven sometidos en sus años de escolaridad; que va más allá de aprobar exámenes para olvidar lo que habían estudiando al obtener un aprobado. El estudio de las matemáticas no se limita a las cuatro paredes del aula y a su profesor, sino que se pueden encontrar numerosos ejemplos a cada paso que damos en el mundo que nos rodea. Tendremos que interactuar con las fracciones en muchas situaciones diferentes, desde la preparación de una comida siguiendo una receta hasta el reparto de unos beneficios según lo que haya trabajado cada uno, pasando, cómo no, por el famoso ejemplo de qué hacer con el pastel, la pizza o los caramelos en una fiesta de cumpleaños.

Por otra parte, desde el punto de vista de la gestión de las enseñanzas acerca de las fracciones establecidas en el currículum, y tomando como base los resultados obtenidos con el estudio empírico, podría ser interesante replantearse la enseñanza de esta materia a lo largo de la educación secundaria, llevando a cabo una secuenciación que incida cada año sobre el concepto de fracción, pero desde interpretaciones diferentes, buscando un enriquecimiento progresivo y una mayor completitud, apreciando sus distintos matices, evitando redundar innecesariamente en el mismo significado y descuidando otros. Y es que no en balde se habla de “mega-concepto” al referirse a las fracciones.

Finalmente, me gustaría comentar que me ha resultado muy grato llevar a cabo un estudio empírico con los alumnos de 1º y 2º de ESO ya que la información que he podido recabar gracias al mismo me ha resultado muy útil para tratar de entender cómo asimilan ellos la materia que se imparte en clase. Muchos estaban preocupados por si las respuestas que dieran al cuestionario iban a contar para su nota, pero una vez que les aseguré que no iba a ser así, se vieron con mayor libertad y he obtenido respuestas muy interesantes y en algunas ocasiones desconcertantes. Recomiendo a cualquier profesor que, una vez al año, pase a sus alumnos un cuestionario de estas características, ya sea del tema de fracciones o de cualquier otro puesto que puede ser una gran ayuda a la hora de enfocar la enseñanza.

“Hay que atreverse a convertir los centros y los programas educativos en talleres de humanidad y a otorgar títulos de verdaderas personas. La educación no puede ser meramente un medio para ganarse la vida, sino que tiene que ser esencialmente un medio para ganar la vida a los demás, para provocar las ganas de vivir con sentido y con proyecto, con metas e ideales”.

Antonio Pérez Esclarín

8. BIBLIOGRAFÍA

- Alguacil, M.C.; Bueno, F.J., Calvillo, M.C., Castro, E. y García, C. (2009). Unidad Didáctica de Fracciones. Universidad de Granada.
- Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matemático. Fracciones I, número 9. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Bufanda, M^a Paz y Mansilla, Serafin (1996). Números. Matemáticas. 1º de ESO. Editorial SM. Madrid.
- Castro, E. (2010). Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial. Universidad de Granada.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2007) Matemáticas 1. Editorial Anaya. Valencia.
- Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía
- Docentes de la Red Escuelas de Campana (2001). *La enseñanza de las fracciones en el segundo ciclo de la Educación General Básica*. Buenos Aires. Plan Estratégico de Campana.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Godino, J.D. (2003) Matemáticas y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros.
- Grupos profesionales de trabajo (1998). *Reflexiones didácticas en torno a fracciones, razones y proporciones*. Ministerio de Educación República de Chile.
- Malet, O. (2010). Los significados de las fracciones: Una perspectiva fenomenológica. Buenos Aires. Revista nº 21. Sección matemática y currículum.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE-A2007-238.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. BOE, 174, 31680-31828.
- Mendoza, J.R. y Silvestre, J (2005). Estrategias para lograr aprendizajes significativos en las fracciones comunes, en el alumno de sexto grado de primera para su acceso a la pos primaria. Secretaría de Educación Pública y Cultura. Universidad Pedagógica Nacional.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

TFM. Unidad Didáctica: Fracciones

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Revista Suma. Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Primavera 1989

Saíz, I. (1990). Fracciones. *Un aprendizaje diferente en el tema de fracciones*.

Páginas web visitadas

<http://es.scribd.com/doc/49612424/FRACCIONES>

<http://es.scribd.com/doc/44441083/fracciones-diplomado>

<http://es.scribd.com/doc/19820778/fracciones>

<http://es.scribd.com/doc/40748562/Problemas-Fracciones-Con-Soluciones>

<http://es.scribd.com/doc/51332753/fracciones>

http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/todo_mate/fracciones_e/ejercicios/fraccionesej10_p.html

http://www.vitutor.com/di/r/b_a.html

<http://neoparaiso.com/imprimir/sudoku-de-fracciones.html>

<http://masdehistoria.blogspot.com/2009/02/los-egipcios-y-las-fracciones.html>

<http://www.buenastareas.com/ensayos/Historia-De-Las-Fracciones/1205781.html>

<http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero>

Páginas web de manipuladores virtuales y applets:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_1.html

<http://www.thatquiz.org/es/index.html>

<http://illuminations.nctm.org/tools/FractionPie/ver2.html>

<http://i-matematicas.com/blog/2009/10/21/fracciones-equivalentes-fraccion-irreducible/>

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_106_g_4_t_1.html?from=topic_t_1.html

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_194_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html