GUIA TEÓRICO PRÁCTICA
CUARTO MEDIO
FUNCIONES Y PROCESOS INFINITOS

GTP 04

Tema: Función Inversa

Nombre Estudiante:	Curso:				Fecha:		
	4°	A	B	C	02	06	2020

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:
- Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.
- Determinar inversa de funciones.
- Reconocer el gráfico de una función inversa.

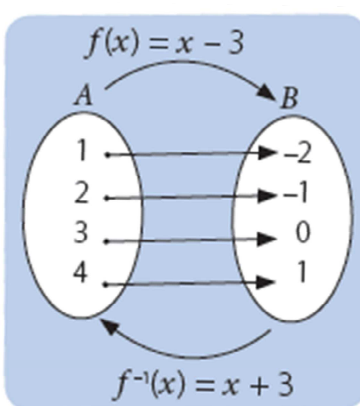
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:
- Revisar Video tutoriales de los conceptos, procedimientos y ejemplos de los Objetivos planteados en plataforma Classroom.
- Leer guía Teórico y práctica para reforzar tus conocimientos y habilidades a través de los conceptos, procedimientos, ejemplos y prácticas propuestas.
- Resolver dudas con apoyo de tu(s)profesor(es) en Classroom.

FUNCIÓN INVERSA

Si una función real **f(x)** es biyectiva, entonces **f(x)** tiene **función inversa** que se denota por $\mathbf{f^{-1}(x)}$.

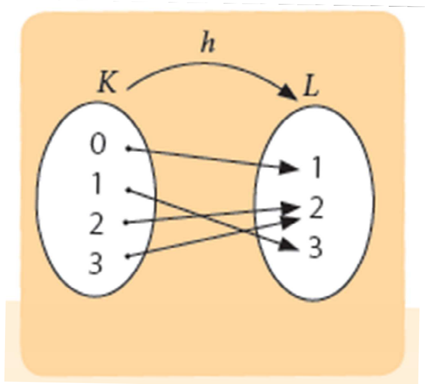
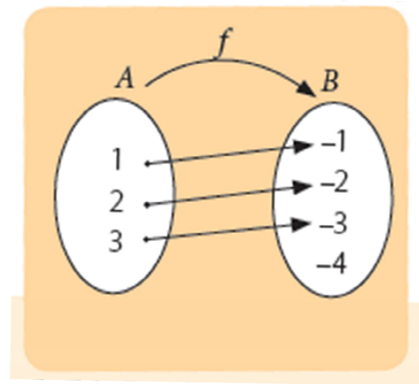
Ejemplo:

En el diagrama sagital se representa una función **f(x)** y su inversa $\mathbf{f^{-1}(x)}$. Si te fijas, el dominio de **f(x)** equivale al recorrido de $\mathbf{f^{-1}(x)}$ y el recorrido de **f(x)** es el dominio de $\mathbf{f^{-1}(x)}$.



Además, para que **$f^{-1}(x)$** sea función, a cada elemento de **B** le corresponde una única pre imagen, de manera que **f(x)** debe ser una función **biyectiva.**

Ejemplos de no existencia de inversa de una función f(x)

	
En el diagrama, **h(x)** no es **inyectiva** ya que h (2) = h (3) = 2. Luego, **$h^{-1}(x)$** no es función pues un elemento de su dominio tiene dos imágenes (2 y 3).	En el diagrama **f(x)** no es **sobreyectiva** ya que –4 no tiene preimagen. Luego, **$f^{-1}(x)$** no es función pues no todos los elementos de su dominio tienen una imagen.

Por lo tanto, **no todas las funciones** tienen una inversa, es decir, solo tienen inversa aquellas funciones que son **biyectivas.**

DETERMINAR FUNCIÓN INVERSA ANALÍTICAMENTE Y GRÁFICAMENTE

EJEMPLOS:

Ejemplo 1)

Sea la función f(x) = x – 3. Encontrar su inversa $f^{-1}(x)$ … (ejemplo diagrama página 1)

Desarrollo:

Como f(x) es una función afín, entonces es Biyectiva. Por lo tanto, tiene inversa

Nota: Una función afín tiene forma **f(x) = mx + n**

Procedimiento matemático:

f (x) = x – 3	Función dada
y = x – 3	f(x) = y
y + 3 = x	Despejar la variable x
x + 3 = y	Cambia variables
$f^{-1}(x)$ = x + 3	Escribe su inversa

Actividad: Graficar ambas funciones con geogebra en línea (Registrar lo observado)
https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Ejemplo 2)

Determina la inversa de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}}$**.** Luego, trazar grafica de **f(x)** y **f^{-1}(x)**

Desarrollo:

f(x) es función afín, es biyectiva, por lo tanto, existe inversa.

Procedimiento matemático:

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$	Función dada
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$	f(x) = y
$y - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}x$ $2y - \frac{2}{5} = x$	Despejar la variable x
$2x - \frac{2}{5} = y$	Cambia variables
$\mathbf{f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}}$	Escribe su inversa

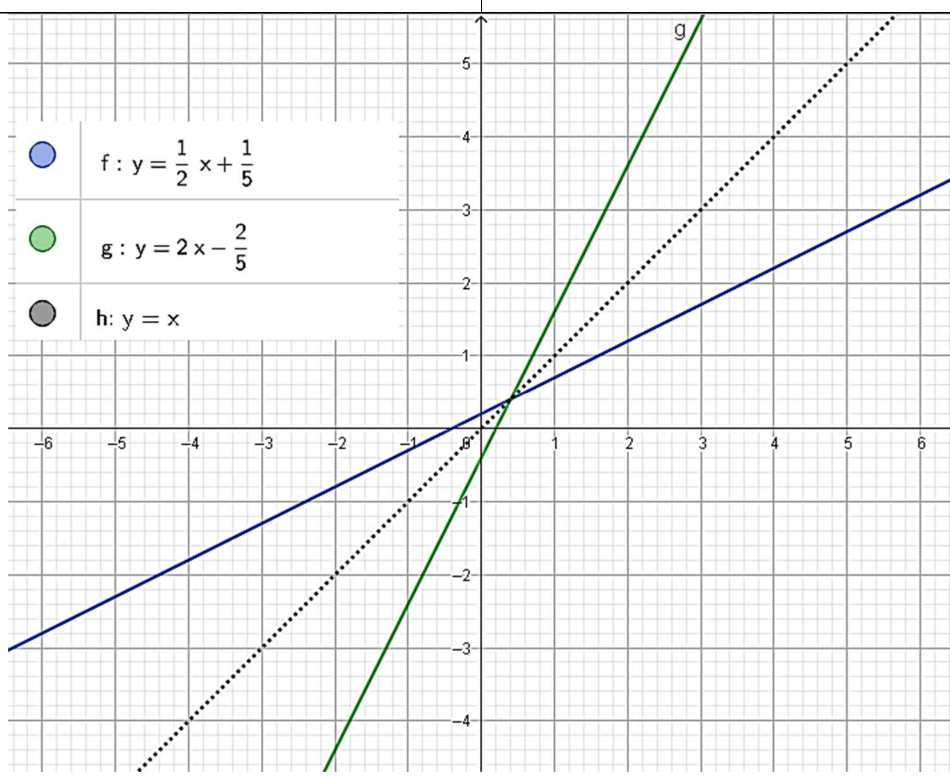


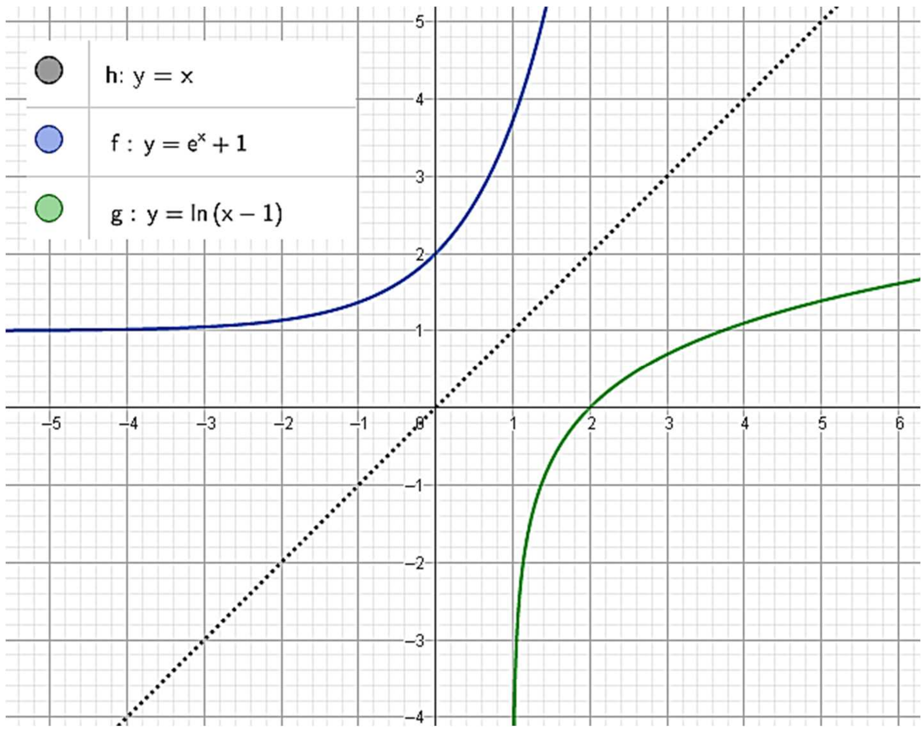
Imagen: geogebra

En la figura se muestran las gráficas de **f(x)** y **f^{-1}(x)**. Las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta **y = x** también llamada, **función identidad** (línea punteada).

Ejemplo 3)

Visualiza la gráfica de las funciones $\boldsymbol{f(x) = e^x + 1}$ y $\boldsymbol{g(x)} = \mathbf{ln(x - 1)}$.

Luego, verifica que ***g*** es la inversa de ***f***.



Desarrollo:

En la figura, se muestran las gráficas de las funciones ***f(x)*** y **g(x)**

Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $\boldsymbol{y = x}$, de modo que podemos suponer que ***g(x)*** es la inversa de ***f(x)***.

Para verificar lo anterior podemos calcular **(*g* o *f*)(*x*)… (Guía 3)** Observa:

$$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = ln((e^x + 1) - 1) = ln(e^x) = x \cdot ln(e) = x$$

Luego, como **(*g* o *f*)(*x*) = *x***, la función ***g(x)*** es la inversa de **f(x).**

Observación Importante:

Si al componer dos funciones **f(x)** y **g(x),** su resultado es la función identidad **y = x**, entonces se dice que una es inversa de la otra.

Es decir,

Si **(f o g)(x) = (f(g(x)) = x** entonces **g(x)** es inversa de **f(x) y viceversa**

Ejemplo 4)

Sea f(x) = 2x – 1 y g(x) = $\frac{x-1}{2}$. Calcule (f o g) (x) y (g o f) (x) y registre sus conclusiones

Procedimiento para calcular **(f o g) (x)**:

(f o g) (x) = (f (g(x))	Por definición de compuesta
$f\left(\frac{x-1}{2}\right)$	Reemplazando la expresión de g(x) en el dominio de f(x)
$2\left(\frac{x-1}{2}\right)-1$ $x-1-1$	Aplicando función f(x) =2x – 1 Se simplifica por 2, y se reducen términos semejantes
x	Función identidad
Conclusión como (f o g)(x) =x se concluye que **f(x)** y **g(x)** son inversas entre si.	

De manera similar, realizamos **(g o f) (x):**

(g o f) (x) = (g (f(x))	Por definición de compuesta
$g(2x-1)$	Reemplazando la expresión de f(x) en el dominio de g(x)
$\frac{(2x-1)-1}{2}-1$ $\frac{2x-1-1}{2}-1$ $\frac{2x-2}{2}-1$ $\frac{2(x-1)}{2}-1$ x – 1 – 1	Aplicando función $g(x)=\frac{x-1}{2}$ Eliminando () Reduciendo términos semejantes Factorizando por 2 y simplificando por el mismo valor Se reducen términos semejantes
x	Función identidad
Conclusión como (g o f)(x) =x se concluye que **g(x)** y **f(x)** son inversas entre si.	

Ejemplo 5)

Si **$f(x) = x^5 + 1$**, entonces cuanto es **$f^{-1}(33)$** es:

Desarrollo:

f(x) es función biyectiva, por lo tanto, existe inversa. (Compruébelo)

Procedimiento matemático:

$\mathrm{f(x)} = x^5 + 1$	Función dada
$\mathrm{y} = x^5 + 1$	f(x) = y
$\mathrm{y} - 1 = x^5$ $\sqrt[5]{y-1} = x$	Despejar la variable x
$\sqrt[5]{x-1} = y$	Cambia variables
$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x-1}$	Escribe su inversa

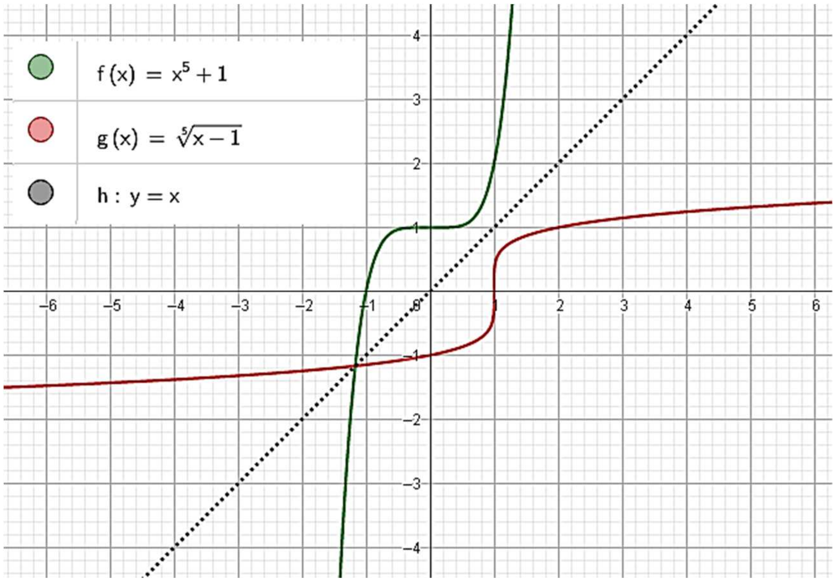
Por lo tanto,

$$\boldsymbol{f^{-1}(33) = \sqrt[5]{33-1} = \sqrt[5]{32} = 2}$$

La respuesta es 2

<u>Observaciones:</u>

Nuevamente se observa que la función f(x) y g(x) son simétricas respecto a la recta y = x.



<u>Ejercicios Propuestos:</u>

¡Desarrolla los ejercicios propuestos en la próxima tarea!!!! Éxito, tu puedes…

Y no olvides preguntar tus dudas… para eso estamos… no tengas vergüenza. Hazte el tiempo.