

La Multiplicación: Una experiencia de aula

Autor: Carlos Castro Díaz

Hoy en día se difunden muchos métodos para resolver el algoritmo de la multiplicación, que en mayor o menor medida aportan a la comprensión real del algoritmo.

José Antonio Fernández Bravo (2007), nos señala que: muchos alumnos saben cómo se calcula, pero no saben qué significa lo que están calculando: una cosa es hacer multiplicaciones y, otra, muy distinta, saber multiplicar. ¿Calcular para calcular, como una simple rutina, o calcular para la comprensión?

El proceso multiplicativo no implica aprenderse de memoria las llamadas tablas de multiplicar y realizar cálculos rutinarios, es mucho más que un cálculo. Cuando iniciamos el proceso multiplicativo, no basta que el alumno o alumna las memorice, sino que la construya a partir de las relaciones entre ellas, descubrir sus regularidades, a través de las propiedades de las operaciones. A nivel inicial, el proceso de la multiplicación debe apoyarse en lo concreto, gráfico y a través de este tránsito llegar al simbolismo.

¿Cómo desarrollamos una línea didáctica, que permita que los alumnos y alumnas puedan resolver problemas multiplicativos? Una tarea que debe abordarse tomando en cuenta los estudios que la didáctica de la matemática, a través de sus investigaciones ya ha aportado. Estudios que también, deben ser abordados entre los maestros en sus jornadas reflexivas, no podemos sólo resolver multiplicaciones donde el énfasis esté en el cálculo. No podemos seguir aplicando técnicas del siglo pasado, sin ningún sustento didáctico. Es imperioso revisar lo que nos aporta la investigación desarrollada en estos últimos años.

Nuestras bases curriculares nos piden expresamente a nivel de tercero básico “**demostrar que comprenden** las tablas de multiplicar hasta 10 de manera progresiva:

- › usando representaciones concretas y pictóricas
- › usando la distributividad como estrategia para construir las tablas hasta el 10.

A nivel de cuarto año **demostrar que comprende** la multiplicación de números de tres dígitos por números de un dígito:

- › usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma
- › aplicando el algoritmo de la multiplicación

En quinto año **demostrar que comprenden** la multiplicación de 2 dígitos por 2 dígitos:

- › usando la propiedad distributiva de la adición respecto de la multiplicación
- › resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios, aplicando el algoritmo

¿Cómo nuestros alumnos y alumnas demuestran que comprenden la multiplicación?

¿Basta con la ejercitación para demostrar la habilidad de comprender?

En estos tres niveles el énfasis curricular está en demostrar que comprenden. Eso no quiere decir que resolver ejercicios de multiplicación como práctica para manejar el algoritmo no sea acertado o adecuado, sino que nuestro objetivo debe ser memorizar para la comprensión más allá de un mero cálculo. Lamentablemente solo se propicia el cálculo por el cálculo con el objetivo solo de aprender el mecanismo.

En las técnicas tradicionales utilizadas subyacen procedimientos que se ocultan y nuestros alumnos y alumnas no son capaces de visualizar. Es aquí donde cada maestro toma las decisiones que permitan avanzar hacia aprendizajes de calidad.

En la siguiente experiencia de aula, se trabajó la multiplicación utilizando la propiedad distributiva, que enfatiza y pone en evidencia los cálculos intermedios por sobre los algoritmos resumidos. La intervención tiene como propósito utilizar estrategias basadas en los números por sobre los dígitos, con el fin de mejorar su enseñanza, centrada en la comprensión por sobre la mecanización. Para implementar dicha estrategia, se trabajó con la resolución de problemas multiplicativos con apoyo de esquemas.

Participaron de esta intervención los quintos años de la escuela Isabel Le Brun. Con la participación de dos docentes.

Utilizando esta técnica basadas en los números, los alumnos y alumnas conocen el real significado, pueden argumentar, analizar el problema, proponer nuevas preguntas, utilizar el cálculo mental, trabajar las propiedades de nuestro sistema de numeración y por sobre todo comprender el algoritmo, es decir, el saber multiplicar.

Silvia Navarro & Malva Venegas (2 004) nos señalan que: los procedimientos de cálculo escrito para determinar el resultado de una multiplicación ocultan resultados parciales y constituyen apretadas síntesis de cálculos, Es necesario hacer visibles esos resultados parciales ocultos, para tener así una comprensión del procedimiento que se utiliza.

Si centramos la atención solo en el cálculo tradicional o convencional como el siguiente:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{138} \times 7 \\ 966 \end{array}$$

Ejemplo 1

$$\begin{array}{r} 45 \times 23 \\ \underline{135} \\ +90^* \\ \underline{1035} \end{array}$$

Ejemplo 2

Estaremos enfatizando sólo un aprendizaje mecánico, esto no quiere decir que dicha estrategia no se pueda utilizar, en referencia a este tipo de cálculos, Silvia Navarro & Malva Venegas (2004) nos indican que: En términos generales, el aprendizaje de este procedimiento se ha transformado en una mecanización sin sentido. Sin lugar a duda, este procedimiento cobrará sentido si se desarrolla en el marco de problemas especialmente elegidos y se construye explicitando los cálculos que están ocultos.

Según, Andrés Navas (2018) este procedimiento suele ser enseñado como algo mecánico: se indica que los resultados deben ser “corridos” (ejemplo 2) hacia la izquierda la cantidad de veces requerida, pero no se provee explicación alguna. Peor aún, a veces se indica que se debe “rellenar” con estrellas o asteriscos los espacios que deben quedar vacíos para no equivocarse en la cuenta.

Este puede ser considerado el primer gran error de la enseñanza de la matemática. De cierto modo, muchos de nuestros problemas en el aprendizaje de esta disciplina derivan de una acumulación de este tipo de errores: se enseña un procedimiento sin revelar su origen ni transmitir su contenido matemático. Profunda equivocación: lo que se aprende mecánicamente se olvida; lo que se comprende se retiene por siempre.

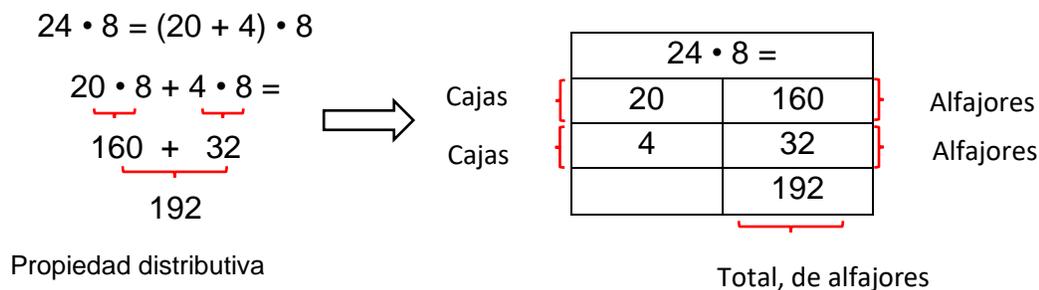
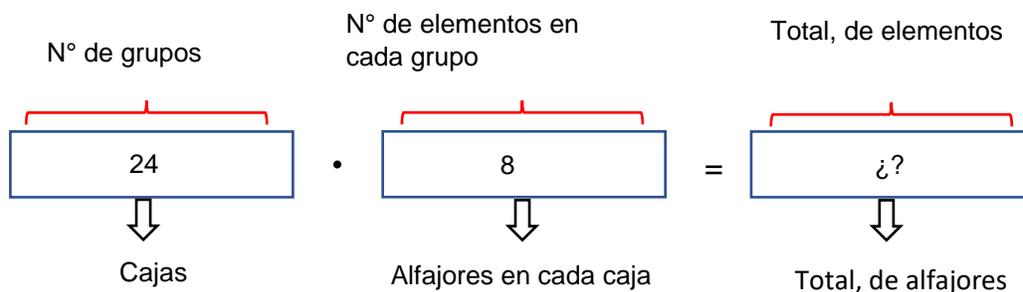
Entonces, a partir de esta evidencia aportada por el conocimiento de las investigaciones didácticas de la matemática, enfrentaremos este gran desafío, acercar la matemática a alumnos y alumnas con un sentido comprensivo y con contenido matemático, lo que supone el desarrollo de habilidades superiores requeridas en las bases curriculares actuales, para potenciar la comprensión en los contenidos matemáticos y por ende mejorar los aprendizajes, para facilitar el camino, hacia el tránsito de ciudadanos, competentes matemáticamente.

Propuesta de trabajo

Problema 1

Gabriel vende alfajores, si ha vendido 24 cajas y en cada caja hay 8 alfajores. ¿Cuántos alfajores ha vendido en total?

Esquema:



Se descompone el primer factor en $(20 + 4)$ se multiplica por 8, se distribuye en $(20 \cdot 8) + (4 \cdot 8)$, se multiplica 20 por 8 se multiplica 4 por 8

$$\begin{array}{ccc} 160 & + & 32 \\ \hline & & 192 \end{array}$$

192

24 · 8 =	
20	160
4	32
	192

Se multiplica 8 por 2 es 16 y se anexa un 0, se obtiene el producto parcial 160.

Se multiplica 8 por 4, obteniendo el producto parcial 32.

Se suman ambos productos parciales 160 + 32 y obtenemos 192

Con esta técnica, se ponen en evidencia los cálculos ocultos, además de dar la posibilidad de descomponer uno de los factores, no solo de acuerdo con el valor posicional de las cifras; sino que se puede descomponer de acuerdo con los conocimientos previos de cada alumno o alumna.

Por ejemplo:

24 · 8 =	
10	80
10	80
4	32
	192

24 · 8 =	
10	80
10	80
2	16
2	16
	192

Esta técnica permite analizar la tabla y generar nuevas preguntas, no solo el producto final 192 que corresponden al total de alfajores.

	24 · 8 =		
Cajas	20	160	Alfajores
Cajas	4	32	Alfajores
		192	

Total, de alfajores

Nuevas preguntas

- ¿Qué significado tiene el número 20?
- ¿Qué significado tiene el número 4?
- ¿Qué significado tiene el número 160 y 32?
- ¿Qué relación hay entre 20 y 160?
- ¿Qué relación hay entre 4 y 32?

Comparación con otras técnicas.

Técnica N° 1
(Técnica convencional)

$$\begin{array}{r} 3 \\ 24 \cdot 8 \\ \hline 192 \end{array}$$

Técnica N° 2
(Técnica usada por la cultura árabe)

2	4	
1	6	3
1	9	2

8

Técnica N° 3 (doble y mitad)

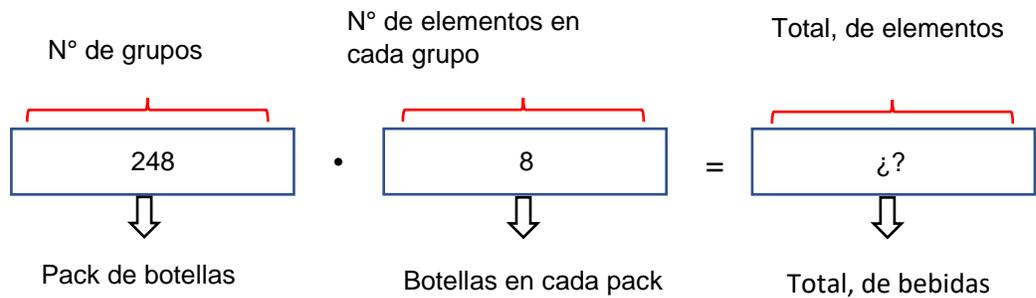
Doble	Mitad
24	8
48	4
96	2
192	1

¿Cuál de las siguientes técnicas enumeradas anteriormente desarrolla la comprensión sobre el algoritmo y permite comprender y saber multiplicar?

Problema 2

Un supermercado tiene en total 248 pack, con 8 botellas de agua en cada uno de ellos, si para un evento deportivo reciben un pedido de 2 000 botellas, ¿le alcanzará para cumplir con el pedido? ¿Por qué?

Esquema:



$248 \cdot 8 = (200 + 40 + 8) \cdot 8$ $(200 \cdot 8) + (40 \cdot 8) + (8 \cdot 8)$ $1\ 600 + 320 + 64$ $\underline{\hspace{10em}}$ $1\ 984$	Pac Pack Pack	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;">248 • 8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">200</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">1 600</td> </tr> <tr> <td style="font-size: small; text-align: center;">Se multiplica por 8</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">40</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">320</td> </tr> <tr> <td style="font-size: small; text-align: center;">Se multiplica por 8</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">8</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+ 64</td> </tr> <tr> <td style="font-size: small; text-align: center;">Se multiplica por 8</td> <td style="font-size: small; text-align: center;">Suma de los productos parciales</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px;">1 984</td> </tr> </table>	248 • 8		200	1 600	Se multiplica por 8		40	320	Se multiplica por 8		8	+ 64	Se multiplica por 8	Suma de los productos parciales	1 984		Botellas en 200 pack Botellas en 40 pack Botellas en 8 pack Total, de botellas en 248 pack
248 • 8																			
200	1 600																		
Se multiplica por 8																			
40	320																		
Se multiplica por 8																			
8	+ 64																		
Se multiplica por 8	Suma de los productos parciales																		
1 984																			

Preguntas para la comprensión.

- a) ¿Cuántas botellas hay en 48 pack?
- b) Si tengo 1 600 botellas, ¿cuántos pack puedo armar?
- c) ¿Cuántas botellas hay en 208 pack?
- d) Si tengo 384 botellas, ¿cuántos pack puedo armar?

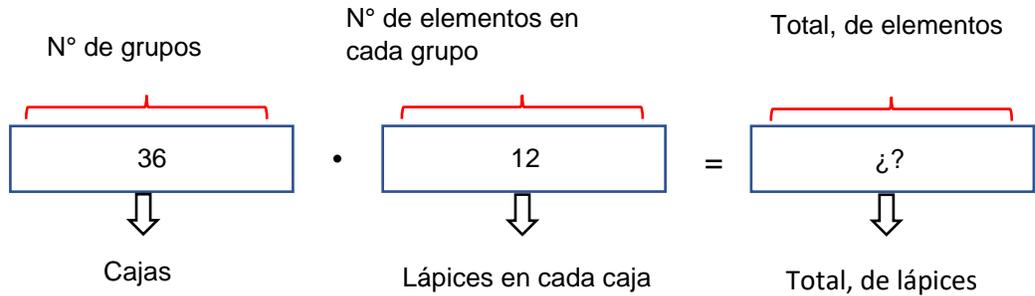
¿El cálculo tradicional proporciona esta calidad de preguntas?

¿Este es el mejor camino, hacia la comprensión de la multiplicación?

Problema 3

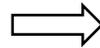
Un paquete contiene 36 cajas, con 12 lápices de colores en cada una de ellas. ¿Cuántos lápices hay en un paquete?

Esquema:



$$\begin{aligned}
 & 36 \cdot 12 = \\
 & (30 + 6) \cdot 10 + (30 + 6) \cdot 2 \\
 & (30 \cdot 10) + (6 \cdot 10) + (30 \cdot 2) + (6 \cdot 2) \\
 & 300 + 60 + 60 + 12 \\
 & 432
 \end{aligned}$$

Propiedad distributiva



$36 \cdot 12 =$			
\cdot	10	2	
30	300	60	360
6	60	12	72
			432

Actividad para promover la comprensión del algoritmo.

Completa los recuadros, recuerda el problema planteado.

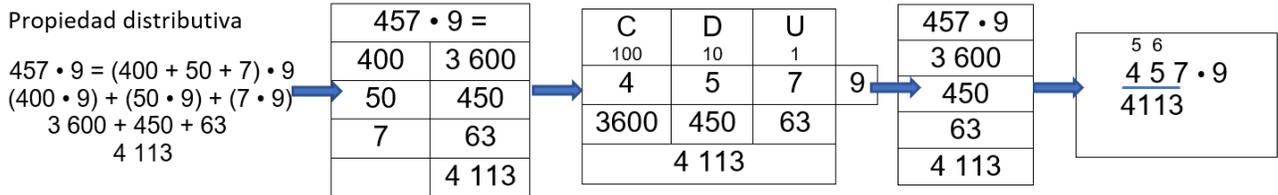
$36 \cdot 12 =$				
	•	10	2	
	30	300	60	360
	6	60	12	72
				432

¿Qué preguntas se pueden plantear a la tabla?

Escribe tus respuestas.

Camino a recorrer para llegar al algoritmo resumido con comprensión.

$457 \cdot 9 =$



Según, Joaquim Giménez & Luisa Girondo (1 993), se debe llegar al algoritmo usual o convencional de la multiplicación, después de una serie de pasos o etapas previas que pongan de manifiesto, los pasos ocultos.

Resultados.

En la aplicación de la técnica basadas en números (propiedad distributiva), se pudo evidenciar que las alumnas logran desarrollar el algoritmo con más confianza, logran dimensionar los significados de los procesos involucrados. Sobre todo, de los cálculos intermedios versus los cálculos ocultos de los algoritmos tradicionales; al respecto Itzcovich, H., Ressia, B., Novembre, & Becerril, M. (2 011), establecen que el algoritmo basados en números, tiene muchas ventajas sobre el algoritmo basado en cifras, una de las cuales es que cada uno de los números que aparecen, tiene un significado específico en el contexto del problema.

En el siguiente ejemplo dimensionaremos lo valioso de esta técnica, pues le da significado a cada número. Cada número tiene un sentido en el contexto del problema.

Problema 3

Un paquete contiene 36 cajas, con 12 lápices de colores en cada una de ellas. ¿Cuántos lápices hay en un paquete?

		$36 \cdot 12 =$				
	•	10	2			
Cajas	30	300	60	360	Lápices	
Cajas	6	60	12	72	Lápices	
				432		
				Total, de Lápices		

¿Qué significado tiene el número 30 y el número 6?, si observamos la tabla nos daremos cuenta de que son cajas y que el 30 es producto de la descomposición del 36.

¿Qué significado tiene el número 10 y el número 2?, nuevamente si observamos la tabla nos daremos cuenta de que es la descomposición del número 12, correspondiente a lápices en el contexto del problema.

Sigamos avanzando, ¿qué significado tiene el número 10 y cuál es su relación entre el número 30 y 300?, aquí se pone en juego la capacidad de interpretar cada número en forma particular y en su conjunto. Entonces de la tabla podemos deducir que el producto parcial 300 corresponde a lápices y dicho valor se obtiene al multiplicar 30 por 10, entonces cada alumna nuevamente debe interpretar que como el 12 se descompuso en 10 y 2, en esa columna la caja tiene 10 lápices y en la columna de la derecha cada caja tiene 2 lápices.

¿Qué significado tiene el número 360?, ya sabemos que son lápices, pero a qué cantidad de cajas involucra. Si observamos la tabla, nos damos cuenta que el 360 se obtiene de sumar 300 y 60 cuyos valores corresponden al número de lápices en 30 cajas, con 12 lápices en cada una de ellas.

Es importante destacar que la resolución de problemas se afianza con el uso de esquemas, pues permite que las alumnas puedan analizar y seleccionar los datos relevantes de los irrelevantes. Además, el procedimiento o técnica empleada permite a las alumnas responder preguntas de nivel explícito e implícito.

Referencias bibliográficas

- Fernández, J. (2007) La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. OEI - Revista Iberoamericana de Educación - Número 43. Campus OEI - Organización Estados Iberoamericanos. Recuperado de <https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a06.htm>.
- Giménez, G. & Gironde, L. (1993). Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas. Barcelona: Graó.
- Iztcovich, H., Novembre, A. & Becerril, M. El abecé de la matemática escolar. Las prácticas de la enseñanza en el aula. Buenos Aires: AIQUE Educación.
- Navarro, S. & Venegas, M. (2004). Talleres Comunes de Perfeccionamiento Nivel Básico 2 (NB2). Educación Matemática. CPEIP – DEG (LEM). Campaña Lectura Escritura Matemática. Ministerio de Educación Chile. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. CPEIP Programa Talleres Comunes de Perfeccionamiento.
- Navas, A. (2018). Lecciones Matemáticas para el recreo. Santiago de Chile: Editorial Planeta.

Anexos

Anexo 1

Ejemplos de actividades.

 MATEMÁTICA QUINTO AÑO ESCUELA ISABEL LE BRUN

Problema 2

Para organizar el cumpleaños de Gabriela, se compraron 12 cajas de jugos, cada caja contiene 6 jugos de 125 CC. A cada invitado se le dará un jugo, si los invitados son 70, ¿alcanzará con la compra, para todos los invitados?

Esquema

Una distribuidora debe entregar un pedido de huevos. El cliente a pedido 45 bandejas con 9 huevos en cada una de ellas. ¿cuántos huevos necesita la distribuidora para cumplir con el pedido?

Esquema

Respuesta:

--

II.- Lee atentamente cada problema y responde las preguntas asociadas.

1. Una librería recibió un pedido de 450 libros de cuentos infantiles, el encargado de las ventas revisó la bodega y encontró 37 cajas con 12 libros en cada una de ellas. ¿Podrá la librería cumplir con el pedido? ¿Faltan o sobran libros? ¿Cuántos?

Números de grupos Elementos en cada grupo Total, de elementos.

$\frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

$37 \cdot 12$

•	10	2		
30	300	60	360	
7	70	14	84	
			444	

Preguntas	Respuesta
1.- Si fueran 30 cajas, con 10 libros en cada una de ellas, ¿Cuántos libros habría?	
2.- Si fueran 30 cajas con 12 libros en cada una de ellas, ¿cuántos libros habrían?	
3.- Si fueran 7 cajas con 2 libros en cada una de ellas, ¿cuántos libros habrían?	
4.- La librería tiene 360 libros y los va a envasar en cajas, con 12 libros en cada una de ellas, ¿cuántas cajas necesita?	
5.- ¿Cuántos libros tiene en total la librería?	
6.- ¿Faltan o sobran libros? ¿Cuántos?	

Para organizar el cumpleaños de Gabriela, se compraron 12 cajas de jugos, cada caja contiene 6 jugos de 125 CC. A cada invitado se le dará un jugo, si los invitados son 70, ¿alcanzará con la compra, para todos los invitados?

Esquema

Realiza 3 preguntas a la tabla

a)

b)

c)

- 3.- Un supermercado tiene en total 238 pack, con 8 latas de bebidas en cada una de ellas, si para un evento deportivo reciben un pedido de 2 000 latas, ¿le alcanzará para cumplir con el pedido? ¿Por qué?

Esquema	Operación
<input type="text"/>	<input type="text"/>
Respuesta: <input type="text"/>	

I.- Resuelve los siguientes ejercicios de multiplicación, usando como técnica la propiedad distributiva.

234 • 4	578 • 8	976 • 7
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

745 • 9	869 • 5	398 • 6
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

324 • 45 =	736 • 14 =	323 • 72 =
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

196 • 53 =	436 • 65 =	523 • 96 =
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

¡Con esfuerzo y dedicación todo se puede lograr!

• Resuelven ejercicios de multiplicación de tres dígitos por un dígito, con apoyo de los bloques base 10.

$123 \cdot 8 =$

CENTENA	DECENA	UNIDAD
100	20	3
800	160	24
984		

$123 \cdot 8$
100 800
20 160
3 24
984

PROFESOR: CARLOS CASTRO DÍAZ

10



• Resuelven ejercicios de multiplicación de cuatro dígitos por un dígito, con apoyo de los bloques base 10.

$1423 \cdot 3$

UNIDAD DE MIL	CENTENA	DECENA	UNIDAD
1000	400	20	3
3000	1200	60	9
4269			

$1423 \cdot 3$
1000 3000
400 1200
20 60
3 9
4269

Evaluación formativa:
Trabajo grupal.
Multiplicación usando propiedad distributiva, con apoyo concreto.

PROFESOR: CARLOS CASTRO DÍAZ

11

$232 \cdot 3 =$

C	D	U
200	30	2
600	90	6
696		

$232 \cdot 3$
200 600
30 90
2 6
696

Descomposición del 45:

40	5
1200	150
80	10
1280	160
1440	

Descomposición del 32:

30	2
960	6
966	

Evaluación formativa:
Multiplicación por tres dígitos y un dígito. Con énfasis en técnica de comprensión.

PROFESOR: CARLOS CASTRO DÍAZ

14



INICIO:
Se organiza el curso para el trabajo en parejas. Se recuerdan normas de convivencia.
Se activan conocimientos previos de la clase anterior, sobre cómo multiplicar utilizando la propiedad distributiva.
Se da a conocer el objetivo de la clase:
"Resolver problemas rutinarios y no rutinarios aplicando el algoritmo de la multiplicación"

DESARROLLO:
• Resuelven multiplicaciones usando la propiedad distributiva en forma resumida.

$567 \cdot 8$	$76 \cdot 15$
500 4000 60 480 7 56 4536	70 700 350 1050 6 60 30 90 1140

• Resuelven problemas multiplicativos que para su resolución requiera el uso de la multiplicación.
Ej:
La escuela de Javierra tiene 242 cajas de lápices de colores, con 12 lápices en cada una. ¿Cuántos lápices tiene en total la escuela?
Entender el problema
¿De qué se trata el problema?
¿Con qué datos cuento?
¿Qué debo hallar?

Evaluación formativa:
Revisión de las diversas estrategias, para multiplicar.

PROFESOR: CARLOS CASTRO DÍAZ

17



Planear una solución
¿Cómo puedo resolver el problema?
Usando un esquema para poder determinar la relación entre los datos y obtener la operación que resuelve el problema.

Cantidad de grupos: 242
Cantidad de elementos en cada grupo: 12
Cantidad total de elementos: ¿?

Problema de iteración
Cuando tengo la cantidad de grupos y la cantidad de elementos en cada grupo y necesito encontrar la cantidad total de elementos se multiplica.
Resolver el problema

$242 \cdot 12$			
200	2000	400	2400
40	400	80	480
2	20	4	24
2904			

Tiene en total 2904 lápices.
Comprobar si la respuesta es la correcta
¿Cómo puedo comprobar que mi respuesta es la correcta?
¿Contesta la pregunta mi solución?

Evaluación formativa:
Revisión de las diversas estrategias, para multiplicar.

Evaluación Formativa
Uso de esquemas para la resolución de problemas multiplicativos.

PROFESOR: CARLOS CASTRO DÍAZ

18