

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES O SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Prop.1: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Prop.2: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Actividad N°1: Determine la ecuación cuyas raíces o soluciones son:

EJEMPLOS:

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
 $2 + 3 = \frac{-b}{a} \implies 5 = \frac{-b}{a}$

$2 \times 3 = \frac{c}{a} \implies 6 = \frac{c}{a}$

Por lo tanto: $a = 1$, $b = -5$ y $c = 6$

La ecuación es: $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$
 $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-b}{a} \implies \frac{7}{6} = \frac{-b}{a}$

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \implies \frac{2}{6} = \frac{c}{a}$

Por lo tanto: $a = 6$, $b = -7$ y $c = 2$

La ecuación es: $6x^2 - 7x + 2 = 0$

c) $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

$2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \implies 4 = \frac{-b}{a}$

$(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \implies 1 = \frac{c}{a}$

Por lo tanto: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 1$

La ecuación es: $x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $x_1 = 5 + 3.i$, $x_2 = 5 - 3.i$

$5 + 3.i + 5 - 3.i = 10 \implies 10 = \frac{-b}{a}$

$(5 + 3.i) \times (5 - 3.i) = 25 - 9.i^2 = 25 + 9 = 34 = \frac{c}{a}$

Por lo tanto: $a = 1$, $b = -10$ y $c = 34$

La ecuación es: $x^2 - 10x + 34 = 0$

e) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$

f) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$

g) $x_1 = 3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$

h) $x_1 = 7 + 2.i$, $x_2 = 7 - 2.i$

Actividad N° 2: Siendo x_1 y x_2 las soluciones de una ecuación $4x^2 - 5x + 6 = 0$, se pide calcular, sin resolver la ecuación, las expresiones:

EJEMPLOS:

a) $2x_1 + 2x_2 - 6.x_1.x_2 = 2.(x_1 + x_2) - 6.(x_1.x_2) = 2.(\frac{5}{4}) - 6.(\frac{6}{4}) = \frac{10}{4} - \frac{36}{4} = \frac{-26}{4} = \frac{-13}{2}$

b) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.(x_1.x_2) = (\frac{5}{4})^2 - 2.(\frac{6}{4}) = \frac{25}{16} - \frac{12}{4} = \frac{-23}{16}$

c) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{6}{4}} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$

d) $x_1^2.x_2 + x_1.x_2^2 =$

e) $(x_1)^3 + (x_2)^3 =$

Actividad N° 3: Dada la ecuación $4x^2 - (5 + k)x + 6k - 10 = 0$, determine el valor de k para que:

EJEMPLOS:

a) La suma de las raíces o soluciones sea 5.

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \implies 5 = \frac{(5+k)}{4} \implies 20 = 5+k \implies k = 15$

b) El producto de las raíces sea 10.

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \implies 10 = \frac{6k-10}{4} \implies 40 = 6k - 10 \implies 6k = 50 \text{ } /:6 \implies k = \frac{25}{3}$$

c) Una de las raíces sea 0.

$$x_1 = 0 \implies 4 \cdot 0^2 - (5+k) \cdot 0 + 6k - 10 = 0 \implies 6k - 10 = 0 \implies k = \frac{5}{3}$$

d) Las raíces difieran sólo en el signo.

$$x_1 = p \quad x_2 = -p$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \implies p + -p = 0 = \frac{-b}{a} \implies 0 = \frac{-(5+k)}{4} \implies 0 = 5 + k \implies k = -5$$

Actividad N° 4: Dada la ecuación $4x^2 + (2+k)x + 9k = 0$, determine el valor de k para que:

a) Una raíz sea el RECÍPROCO de la otra.

b) El producto de las raíces sea 6.

c) Una de las raíces sea 1.

d) Las raíces difieran sólo en el signo.

RESPUESTA A LAS ACTIVIDADES

Actividad 1:

$$e) x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$f) 15x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$g) x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$h) x^2 - 14x + 53 = 0$$

Actividad 2:

$$d) x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

$$\begin{aligned} e) (x_1)^3 + (x_2)^3 &= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1)^2 + (x_2)^2 - x_1 \cdot x_2) \\ &= \left(\frac{6}{4}\right) \cdot \left((x_1)^2 + (x_2)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= \left(\frac{6}{4}\right) \cdot \left((x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{6}{4}\right) \cdot \left(\left(\frac{6}{4}\right)^2 - \frac{10}{4} - \frac{5}{4}\right) \\ &= \frac{-235}{64} \end{aligned}$$

Actividad 4:

$$a) k = \frac{4}{9}$$

$$b) k = \frac{100}{9}$$

$$c) k = -\frac{1}{9}$$

$$d) k = -2$$