

## Progresiones Aritméticas

Un tipo particular de sucesión son la que se denominan progresiones; las más conocidas son las aritméticas y las geométricas, pero hay otras. Aquí estudiaremos las Progresiones Aritméticas. Vamos la definición.

**Definición** Se dice que una serie de números están en **progresión aritmética** cuando cada uno de los ellos es igual al anterior más una cantidad constante llamada *razón* o *diferencia* de la progresión.

Así, las siguientes dos sucesiones constituyen progresiones aritméticas:

3, 7, 11, 15,.....

8, 2, -4, -10,.....

y la sucesión que sigue no es una progresión aritmética:

1, 2, 4, 8,.....

La diferencia  $d$  se obtiene restando cualquier término de la progresión del término que le sigue. Así, en el primer ejemplo  $d = 4$ , esto porque;  $7-3$ , o  $11-7$ , o  $15-11$ , son iguales a 4. En general la razón o diferencia se obtiene con la fórmula:

$$d = a_{k+1} - a_k$$

**Nota 1** Si vemos la progresión aritmética

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots$$

notamos que en cualquier término el coeficiente de la diferencia  $d$  es siempre una unidad menor que el número de orden del término de la sucesión. Veamos:

el 3<sup>er</sup> término es  $a_1 + 2d$ ;

el 6<sup>to</sup> término es  $a_1 + 5d$ ;

el 10<sup>mo</sup> término es  $a_1 + 9d$ ;

el 25<sup>vo</sup> término es  $a_1 + 24d$ ;

y en general;

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Está última fórmula se usa para hallar el término n-ésimo que queramos.

**Ejemplo 1**

Demostrar que la sucesión

$$1, 4, 7, 10, \dots, 3n - 2, \dots$$

es una progresión aritmética encontrando la razón o diferencia.

Solución:

Es obvio que la diferencia es 3. Veamos la demostración formal:

$$a_{k+1} - a_k = [(3(k+1) - 2) - [3k - 2]]$$

$$a_{k+1} - a_k = 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3$$

**Ejemplo 2**

Hallar el sexto, octavo y décimoquinto término de la sucesión aritmética cuyos tres primeros términos son 4, 7, 10,...

Solución:

La diferencia comun es 3. Al buscar el sexto término  $a_6$ , usamos la fórmula  $a_6 = a_1 + 5d$ ,

$$a_6 = 4 + 5 \cdot 3 = 19$$

Así,  $a_6 = 19$ .

Calculando a mano y haciendo la lista de los términos de la progresión aritmética, obtenemos: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,...

Ahora el 8<sup>vo</sup> término.

$$a_8 = a_1 + 7 \cdot d = 4 + 7 \cdot 3 = 25$$

y finalmente  $a_{15}$ ;

$$a_{15} = a_1 + 14 \cdot d = 4 + 14 \cdot 3 = 46, \text{ así}$$

$$a_{15} = 46.$$

**Ejemplo 3**

Si el cuarto término de una progresión aritmética es 5 y el noveno término es 20, obtener el doceavo término.

Solución:

Sustituimos  $n = 4$  y  $n = 9$  en la fórmula  $a_4 = a_1 + 3d$  y  $a_9 = a_1 + 8d$ .Y como  $a_4 = 5$  y  $a_9 = 20$  obtenemos el siguiente sistemas  $2 \times 2$ .

$$5 = a_1 + 3d$$

$$20 = a_1 + 8d$$

Este sistema tiene como solución única  $d = 3$  y  $a_1 = -4$ , de aquí es fácil obtener  $a_{12}$ .  
 $a_{12} = a_1 + 11 \cdot d = -4 + 11 \cdot 3 = 29$ .

**Ejemplo 4**

Hallar el 38<sup>vo</sup> término de la progresión aritmética:  $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \dots$

Solución:

Aquí  $a_1 = \frac{2}{3}$  y  $d = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ , luego

$$a_{38} = a_1 + 37 \cdot d = \frac{2}{3} + 37 \cdot \frac{5}{6}$$

$$a_{38} = 31\frac{1}{2}.$$

**Ejercicios**

**Parte I** Hallar el,

- |   |  |
|---|--|
| 1. 9 <sup>no</sup> término de la P.A.: 7, 10, 13,...                          | 14. 19 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{1}{3}, \frac{7}{8}, \dots$     |
| 2. 12 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 5, 10, 15,...                         | 15. 27 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $3\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, \dots$   |
| 3. 48 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 9, 12, 15,...                         | 16. 36 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{7}{9}, \frac{1}{3}, \dots$     |
| 4. 63 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 3, 10, 17,...                         | 17. 15 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{2}{7}, \frac{1}{8}, \dots$     |
| 5. 12 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 11, 6, 1,...                          | 18. 21 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{-3}{5}, \frac{-14}{15}, \dots$ |
| 6. 28 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 19, 12, 5,...                         | 19. 13 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{-1}{4}, -2\frac{1}{4}, \dots$  |
| 7. 13 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 3, -1, -5,...                         | 20. 19 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{-5}{6}, \frac{-1}{3}, \dots$   |
| 8. 54 <sup>vo</sup> término de la P.A.: 8, 0, -8,...                          | 21. 33 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $3\frac{2}{3}, 2\frac{11}{12}, \dots$ |
| 9. 31 <sup>vo</sup> término de la P.A.: -7, -3, 1,...                         | 22. 41 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $2\frac{4}{5}, 2\frac{7}{10}, \dots$  |
| 10. 17 <sup>vo</sup> término de la P.A.: -8, 2, 12,...                        | 23. 26 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{-3}{5}, \frac{3}{10}, \dots$   |
| 11. 12 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots$ | 24. 19 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $-4, \frac{-2}{3}, \dots$             |
| 12. 17 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \dots$ | 25. 39 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $3, -1\frac{1}{4}, \dots$             |
| 13. 25 <sup>vo</sup> término de la P.A.: $\frac{3}{8}, \frac{11}{24}, \dots$  |  |

**Parte II** Encuentre los términos quinto, décimo y n-ésimo de la progresión aritmética dada:

- |                           |   |
|---------------------------|---|
| 1. 2, 6, 10, 14, ...      | 5. -7, -3.9, -0.8, 2.3,...                  |
| 2. 16, 13, 10, 7, ...     | 6. $x-8, x-3, x+2, x+7, \dots$              |
| 3. 3, 2.7, 2.4, 2.1,...   | 7. $\ln 3, \ln 9, \ln 27, \ln 81, \dots$    |
| 4. -6, -4.5, -3, -1.5,... | 8. $\log 1000, \log 100, \log 10, 0, \dots$ |

**Parte III** Resuelva:

1. Encuentre el décimosegundo término de la progresión aritmética cuyos primeros términos son 9.1 y 7.5.
2. Hallar el décimoprimer término de la progresión cuyos primeros términos son  $2 + \sqrt{2}$  y 3.
3. Los términos sexto y séptimo de una progresión aritmética son 2.7 y 5.2. Obtenga el primer término.
4. El  $a_{15} = 20$  y la razón  $\frac{2}{7}$ . Hallar el 1<sup>er</sup> término.
5. El  $a_{32} = -18$  y la razón 3. Hallar el 1<sup>er</sup> término.
6. Hallar el 1<sup>er</sup> término, sabiendo que el 8<sup>vo</sup> término es  $\frac{3}{4}$  y el 9<sup>vo</sup> término 1.
7. El quinto término de una progresión aritmética es 7 y el séptimo término  $8\frac{1}{3}$ . Hallar el primer término.
8. Dada un progresión con  $a_3 = 7$  y  $a_{20} = 43$ . Determine  $a_{15}$
9. Hallar la diferencia de la progresión 3,...,8 donde 8 es el 6<sup>to</sup> término.
10. Hallar la razón de -1,...,-4 donde -4 es el 10<sup>mo</sup> término.
11. Hallar la diferencia de  $\frac{1}{2}, \dots, \frac{-3}{8}$  donde  $\frac{-3}{8}$  es el 17<sup>vo</sup> término.
12. El primer término de una progresión aritmética es 5 y el 18<sup>vo</sup> término es -80. Hallar la diferencia.
13. El 92<sup>vo</sup> término de una progresión aritmética es 1050 y el 1<sup>er</sup> término es -42. Hallar la diferencia.
14. ¿Cuántos términos tiene la progresión 4,6,...,30?
15. ¿Cuántos términos tiene la progresión  $5, 5\frac{1}{3}, \dots, 18$ ?
16. El primer término de una progresión arimética es  $5\frac{1}{5}$ , el 2<sup>do</sup> término 6 y el último término es 18. Hallar el número de términos.

**Nota 2** En toda progresión aritmética la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos de la progresión.

Por ejemplo la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50. Tiene como suma de los extremos  $50+5=55$  y dos términos equidistantes al interior de la progresión serían 10 y 45 que suman 55, también 20 y 35 suman 55, etc.

Si el número de términos es par funciona bien las sumas dos a dos, pero si el número de término es impar el término central es la media aritmética de la progresión. Y en este último caso, la suma de los términos equidistante es igual al doble del término central.

Por ejemplo la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. Tiene como suma de los extremos  $45+5=50$  y dos términos equidistantes al interior de la progresión serían 10 y 40 que suman 50, también 20 y 30 suman 50, etc. así, el término central es 25. Y el doble del término central es:  $2 \cdot 25 = 50$ .

## Interpolación de Términos

### Definición

Cuando tres cantidades están en progresión aritmética se dice que la intermedia es la media aritmética de las otras dos. Así,  $a$  es la media aritmética entre  $a - d$  y  $a + d$ .

### Definición

**Interpolación un número dado de medios aritméticos entre dos cantidades dadas.** Sean  $a$  y  $b$  las cantidades dadas y  $n$  el número de medios. Incluyendo los extremos, el número de términos será  $n + 2$ ; de tal manera que tenemos que encontrar una progresión aritmética de  $n + 2$  términos, de la cual  $a$  es el primero y  $b$  el último.

Sea  $d$  la diferencia; entonces  $b = (n+2)$ -ésimo término y  $b = a + (n+1)d$  ;

de donde,  $d = \frac{b-a}{n+1}$ ; y los medios requeridos son;

$$a + \frac{b-a}{n+1}, a + 2\frac{(b-a)}{n+1}, a + 3\frac{(b-a)}{n+1}, \dots, a + n\frac{(b-a)}{n+1}.$$

### Ejemplo 5

La suma de tres números en progresión aritmética es 27 y la suma de sus cuadrados es 293. Hallar los números.

Solución:

Sea  $a$  el número intermedio y  $d$  la diferencia. Los tres números serán:  $a - d$ ,  $a$ ,  $a + d$ .

Por lo tanto,  $a - d + a + a + d = 27$ ; de donde  $a = 9$ , y los tres números son:  $9 - d$ ,  $9$ ,  $9 + d$ .

$$\text{entonces } (9 - d)^2 + 9^2 + (9 + d)^2 = 293;$$

$$\text{de donde } d = \pm 5.$$

y los números son 4, 9, 14.

### Ejemplo 6

Interpolación 4 medios aritméticos entre 1 y 3.

Solución:

Como 1 y 3 son los extremos, tendremos la progresión: 1, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 3.

Si hallamos la diferencia podremos sumarla a 1 y tendríamos al segundo término, el tercero lo hallamos sumando la diferencia al segundo y así sucesivamente.

$$\text{La diferencia } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{3-1}{4+1} = \frac{2}{5}$$

Aquí  $n = 4$ , que son el número de términos a interpolar. Luego, el segundo término  $a_2 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ , el tercero  $a_3 = \frac{7}{5} + \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$ , cuarto  $\frac{11}{5}$  y el quinto  $\frac{13}{5}$ . Interpolando estos medios tenemos la progresión aritmética:

$$1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \frac{13}{5}, 3.$$

**Ejemplo 7**

Insertar tres medias aritméticas entre 2 y 9.

Solución:

Hay que hallar una progresión que tenga el formato: 2, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, 9.

Hallamos la diferencia con la fórmula:  $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{7}{4}$ , donde  $n = 3$ , número de términos a interpolar. Ya sabemos que la progresión tendrá  $n + 2$  términos, es decir; 5 términos.

Luego para hallar el segundo término, tenemos la simple suma  $2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$  y así sucesivamente.

Entonces la progresión quedaría:  $2, \frac{15}{4}, \frac{11}{2}, \frac{29}{4}, 9$ .

### Suma de los Términos de una Progresión Aritmética

**Teorema**

Si  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  es una progresión aritmética con diferencia  $d$ , entonces la  $n$ -ésima suma parcial  $S_n$  está dada por la expresiones

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**Ejemplo 1**

Hallar la suma de los primeros 12 términos de la progresión aritmética 7, 13, 19,...

Solución:

Vamos a buscar el último término de la progresión con  $d = 6$  y  $a_1 = 7$ .

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ , entonces  $a_{12} = 7 + (12 - 1)6 = 73$ . Ahora tenemos  $a_{12} = 73$ , y usando la fórmula

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(7 + 73) = 480$$

Luego  $S_{12} = 480$ .

**Ejemplo 2**

Hallar la suma de los 13 primeros términos de la progresión  $\frac{5}{6}, \frac{1}{12}, \dots$

Solución:

La diferencia es  $d = \frac{1}{12} - \frac{5}{6} = \frac{-3}{4}$  y  $a_1 = \frac{5}{6}$ . Hallemos el término  $13^{\text{vo}}$ .

$$a_{13} = a_1 + (n - 1)d = \frac{5}{6} + (13 - 1) \cdot \frac{-3}{4} = \frac{-49}{6}$$

Aplicando la fórmula de la suma:

$$S_{13} = \frac{13}{2} \left( \frac{5}{6} + \frac{-49}{6} \right)$$

Finalmente  $S_{13} = -47\frac{2}{3}$ .

### Ejemplo 3

Determinar la suma de todos los enteros pares desde 2 hasta 100.

Solución:

El problema dado es equivalente a encontrar la suma de los primeros 50 términos de la progresión aritmética  $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$ . Al sustituir  $n = 50$ ,  $a_1 = 2$  y  $a_{50} = 100$ .

$$S_{50} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{50}) = \frac{50}{2}(2 + 100) = 2550$$

Por consiguiente,  $S_{50} = 2550$ .

## Ejercicios

**Parte I** Determine la media aritmética de los siguientes números; esto es, interpolar un medio aritmético entre ellos:

1. 9 y 27

2. 11 y 46

3. -7 y 5

4. -12 y 15

5.  $\frac{3}{2}$  y  $\frac{2}{3}$

6.  $\frac{-5}{3}$  y  $\frac{13}{5}$

**Parte II** Interpolar:

1. 3 medios ariméticos entre 5 y 27.

2. 6 medios ariméticos entre -2 y -23.

3. 8 medios ariméticos entre 2 y -25.

4. 3 medios aritméticos entre 3 y 11.

5. 7 medios aritméticos entre 19 y -5.

6. 5 medios aritméticos entre -13 y -73.

7. 4 medios aritméticos entre -42 y 53.

8. 5 medios aritméticos entre -81 y -9.

9. 3 medios aritméticos entre 1 y 3.

10. 4 medios aritméticos entre 5 y 12.

11. 5 medios aritméticos entre -4 y 3.

12. 6 medios aritméticos entre -1 y 3.

13. 7 medios aritméticos entre -2 y -5.

14. 5 medios aritméticos entre  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{1}{8}$ .

15. 8 medios aritméticos entre  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{-1}{8}$ .

16. 9 medios aritméticos entre  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{7}{10}$ .

17. 13 medios ariméticos entre 3 y  $\frac{13}{2}$ .

**Parte III** Hallar la SUMA de los:

- |  |  |
|--|--|
| 1. 8 primeros términos de 15, 19, 23, ...                      | 8. 14 primeros términos de $\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \dots$ |
| 2. 19 primeros términos de 31, 38, 45, ...                     | 9. 19 primeros términos de $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$  |
| 3. 24 primeros términos de 42, 32, 22, ...                     | 10. 34 primeros términos de $\frac{2}{5}, \frac{7}{55}, \dots$             |
| 4. 80 primeros términos de -10, -6, -2, ...                    | 11. 11 primeros términos de $2\frac{1}{3}, 3\frac{2}{15}, \dots$           |
| 5. 60 primeros términos de 11, 1, -9, ...                      | 12. 46 primeros términos de $3\frac{1}{4}, 3\frac{13}{20}, \dots$          |
| 6. 50 primeros términos de -5, -13, -21, ...                   | 13. 17 primeros términos de $-2, \frac{1}{4}, \dots$                       |
| 7. 9 primeros términos de $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ | 14. 12 primeros términos de $-5, -4\frac{5}{8}, \dots$                     |

**Parte IV** Encuentre la suma  $S_n$  para la progresión aritmética que satisface las condiciones siguientes:

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $a_1 = 10, d = -3$ y $n = 30$ .    | 7. $a_n = -7, d = \frac{-1}{3}$ y $n = 35$ .           |
| 2. $a_1 = 2,4, d = 0,1$ y $n = 40$ .  | 8. $a_1 = 17, a_n = 173$ y $d = 3$ .                   |
| 3. $a_1 = 10, a_{10}=15$ y $n = 10$ . | 9. $a_1 = -6, d = 4$ y $n = 17$ .                      |
| 4. $a_1 = 13, d = 3$ y $n = 19$ .     | 10. $a_1 = -5, a_n = 2$ y $d = \frac{1}{3}$ .          |
| 5. $a_1 = 7, a_n = -45$ y $n = 27$ .  | 11. $a_7 = \frac{7}{3}, d = \frac{-2}{3}$ y $n = 15$ . |
| 6. $a_n = -61, d = -2$ y $n = 23$ .   |  |

**Parte V** Determine las sumas:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1. $\sum_{k=1}^{20} (3k - 5)$ | 3. $\sum_{k=1}^{18} (\frac{1}{2}k + 7)$ |
| 2. $\sum_{k=1}^{12} (7 - 4k)$ | 4. $\sum_{k=1}^{10} (\frac{1}{4}k + 3)$ |

**Parte VI** Hallar el valor del elemento que falta ( $a_1, a_n, d, n, S_n$ ):

- $S_n = -237, a_1 = 23$  y  $n = 79; a_n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $d = \underline{\hspace{2cm}}$
- $S_n = -315, a_1 = -2$  y  $n = 63; a_n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $d = \underline{\hspace{2cm}}$
- $S_n = 3720, a_1 = 15$  y  $d = 7; a_n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $S_n = 874, a_1 = 5$  y  $d = 3; n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $a_1 = 2, d = -3$  y  $S_n = -1245; a_n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $a_n = 68, d = 3$  y  $S_n = 805; n = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
- $a_n = -35, d = -2$  y  $S_n = -323; a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $a_1 = -7, n = 19$  y  $S_{19} = 380; d = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$
- $a_2 = \frac{31}{4}, a_{31} = \frac{1}{2}$  y  $a_n = \frac{-13}{2}; a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  y  $n = \underline{\hspace{2cm}}$

**Parte VII** Otros ejercicios.

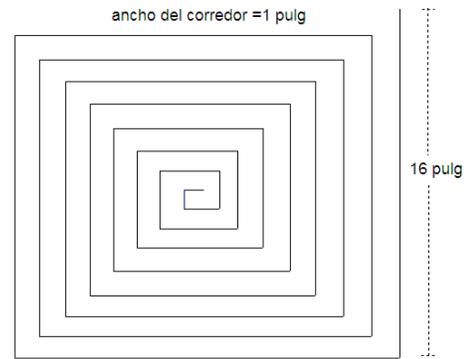
- Hallar  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(30)$ , si  $f(x) = 2x + 3$ .
- Hallar  $f(\frac{-3}{2}) + f(1) + f(\frac{7}{2}) + \dots + f(21)$ , si  $f(x) = -x + 2$ .
- En una P.A. el primer término es 2, el último 29 y la suma 155. Hallar la diferencia.
- La suma de 15 términos de una P.A. es 600 y la diferencia 5. Hallar el primer término.

5. El tercer término de una P.A. es 18 y el séptimo 21. Hallar la suma de los primeros 17 términos.
6. La suma de tres números en P.A. es 27 y su producto 504. Hallar estos números.
7. La suma de tres números en P.A. es 12 y la suma de sus cubos es 408. Hallar estos números.
8. El 2<sup>do</sup> y el 4<sup>to</sup> término de una P.A. suman 22 y el 3<sup>ro</sup> y el 7<sup>mo</sup> término suman 34. ¿Cuáles son esos cuatro términos?
9. En una P.A. de 12 términos el 1<sup>ro</sup> y el 12<sup>vo</sup> suman  $53\frac{1}{2}$ . ¿Cuál es la suma del 3<sup>ro</sup> y el 10<sup>mo</sup> término?
10. ¿Cuál es el 6<sup>to</sup> término de una P.A. de 11 términos si su primer término es -2 y el último -52?
11. El 5<sup>to</sup> término de una P.A. es 31 y el 9<sup>no</sup> término 59. Determine el 12<sup>mo</sup> término?
12. ¿Cuántos términos de la suma  $1+3+5+\dots$  se necesitan para sumar 1234321?
13. Hallar la suma de los 72 primeros múltiplos de 11 que siguen a 66.
14. Hallar la suma de los números impares del 51 al 813?
15. Hallar la suma de todos los enteros pares desde 12 hasta 2832 inclusive.
16. Hallar la suma de todos los enteros impares desde 9 hasta 6381 inclusive.
17. Sumar los 40 primeros términos de la P.A.:  $a-3b, 2a-5b, 3a-7b, \dots$
18. Sumar los 25 primeros términos de la P.A.:  $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, \dots$
19. Sumar los 21 primeros términos de la P.A.:  $\frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}, \dots$
20. Sumar los 10 primeros términos de la P.A.:  $\frac{2a^2-1}{a}, 4a - \frac{3}{a}, \frac{6a^2-5}{a}, \dots$

### Problemas de Aplicación

1. Una persona ahorra cada mes 50 centavos más que en el mes precedente, y en 15 años el total de sus ahorros es de \$ 10 305. ¿Cuánto ahorro primer mes? ¿Cuánto el último mes?
2. Un hombre acepta un empleo con un salario de \$3 000 por el primer año, y con un aumento de \$100 por año en el futuro. ¿Cuántos años deberá trabajar para que su ganancia total sea de \$60 000?  
R/n=16.
3. Un hombre hace un contrato para perforar un pozo de 600 metros cobrando \$2.50 por el primer metro y luego por cada metro siguiente, 10 centavo más que por el anterior, ¿cuánto recibe por perforar el pozo?  
R/S<sub>600</sub>=19 470.
4. Si un cuerpo recorre 16.1 pies durante el primer segundo, el triple de lo anterior durante el segundo segundo, el quíntuplo durante el tercero, y así sucesivamente, ¿cuánto caerá durante el decimocuarto segundo? ¿cuánto en  $t$  segundos?
5. En los extremos de A y B de una recta de 50 metros se trazan en un mismo sentido dos perpendiculares a AB; son ellas AC y BD, de 2 y 5 metros longitud respectivamente. A intervalos de 0.5 metros a lo largo de AB se trazan perpendiculares para cortar CD. Hallar la suma de las longitudes de las perpendiculares, incluyendo AC y BD.

6. Calcule la longitud total de la línea laberíntica de la figura, si el ancho del laberinto formado por la línea es de 16 pulgadas y los corredores del mismo tienen un ancho de 1 pulgada. ¿Cuál sería la longitud si el ancho del laberinto fuera de 32 pulgadas ?



7. Compré 50 libros. Por el primero pagué 8 centavos y por cada uno de los demás 3 centavos más que por el anterior. Hallar el importe de la compra.
8. Un dentista arregló a un hombre todas las piezas de la boca que tenía completa. Por la primera le cobró \$1 y por cada una de las restantes 20 centavos más que por la anterior. ¿Cuánto cobró el dentista?
9. ¿Cuánto ha ahorrado un hombre en 5 años si en enero del primer año ahorró \$2 y en cada mes posterior ahorró \$3 más que el precedente?
10. Un hombre avanza en su primer segundo de su carrera 6 metros y en cada segundo posterior avanza 25 centímetros más que el anterior. ¿Cuánto avanzó en el 8<sup>vo</sup> segundo y que distancia habrá recorrido en 8 segundos?
11. Los ahorros de 3 años de una persona están en progresión aritmética. Si en los tres años ha ahorrado \$2 400, y el primer año ahorró la mitad de lo que ahorró el segundo, ¿cuánto ahorró cada año?
12. Una deuda puede ser pagada en 32 semanas pagando \$5, la primera semana \$8 la segunda semana, \$11 la tercera semana y así sucesivamente. Hallar el importe de la deuda.
13. Una persona viaja 50 kilómetros el primer día y en cada día posterior  $5\frac{1}{2}$  km menos de los que recorrió el día anterior. ¿Cuánto habrá recorrido al cabo de 8 días ?
14. En el primer año de negocio un hombre ganó \$500 y en el último ganó \$ 1 900. Si en cada año ganó \$200 más que el año anterior, ¿cuántos años tuvo el negocio?
15. Las ganancias anuales de un comerciante durante 11 años están en P.A: El primer año ganó \$1 180 y el último \$6 180. ¿Cuánto más ganó en cada año a contar del segundo año, que en el anterior?
16. Las pérdidas de 5 años de una casa de comercio están en P. A.. El último año perdió \$3 000 y la pérdida de cada año fue de \$300 menos que el año anterior. ¿ Cuánto perdió el primer año?
17. Una piedra dejada caer libremente desde la azotea de un edificio recorre 16.1 pies en el primer segundo, y en cada segundo posterior recorre 32.2 pies más que en el segundo anterior. Si la piedra tarda 5 segundos en llegar al suelo, ¿ cuál es la altura del edificio ?
18. Las ganancias de 3 años de un almacén están en P.A. El primer año ganó \$12 500 y el tercero \$20 500. ¿Cuál fue la ganancia del 2<sup>do</sup> año?
19. Los diámetros de las poleas asentadas en un eje común forman una P.A. de cinco términos, cuyos términos extremos son 120 mm y 216 mm; encuentre los diámetros de las poleas intermedias.

20. ¿ Cuántas veces suena un reloj por día si éste suena también en las medias horas?
21. La señora Kupetsky tiene 14 copas de plata, cada una de las cuales se diferencia en 4 onzas según una P.A., la última pesa 59 onzas; hallar el peso de todas las copas de la colección.
22. La suma de tres números que componen una P.A. es igual a 16. El producto del primero por el segundo es igual a  $12\frac{4}{9}$ . Encontrar los tres números.
23. Un cuerpo que cae libremente en el vacío recorre en el primer segundo aproximadamente 4.8 metros y en cada segundo siguiente 9.8 m más. ¿Qué camino recorre el cuerpo en 10 segundos ? ¿Qué camino ha recorrido en el último segundo ?

**Nota 3**

Para determinar el valor de  $n$  en una progresión aritmética cuando se conocen  $S_n$ ,  $a_1$  y  $d$  tenemos la ecuación cuadrática

$$S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2}$$

y cuando ambas raíces son enteras y positivas no presenta dificultad la interpretación del resultado correspondiente a cada una. En algunos casos se puede dar una interpretación conveniente para un valor negativo de  $n$ .

**Ejemplo 1**

¿Cuántos términos de la progresión  $-9, -6, -3, \dots$  deben tomarse para que la suma sea 66?

Solución:

Así, tendremos que  $S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2} = 66$

haciendo algo de algebra elemental;  $n^2 - 7n - 44 = 0$

o sea,  $(n - 11)(n + 4) = 0$

de donde,  $n = 11$  ó  $n = -4$ .

Si tomamos los 11 primeros términos de la progresión:

$$-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$$

su suma es 66.

Si comenzamos por el último término y contamos hacia atrás cuatro términos, la suma es también 66.

Aunque la solución negativa no da una respuesta con sentido al problema propuesto, se puede dar una pseudo interpretación y un significado más o menos matemático y que de alguna manera hay una ligazón con la respuesta del valor positivo.

**Nota 4**

Cuando el valor de  $n$  es fraccionario no hay un número exacto de términos que correspondan a una solución.

**Ejemplo 2**

¿Cuántos términos de una progresión aritmética 26, 21, 16,... deben tomarse para que la suma sea 74?

Solución:

$$\text{En este caso, } S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2} = 74$$

$$\text{desarrollando } 5n^2 - 57n + 148 = 0$$

$$\text{de donde } (n - 4)(5n - 27) = 0$$

$$\text{Y así, } n = 4 \text{ y } n = 7\frac{2}{5}$$

El número de términos es 4. Y observamos que la suma de los 7 términos es mayor, mientras que la suma de los 8 términos es menor que 74.

**Ejemplo 3**

Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 metros uno del otro, se mueven al encuentro mutuo. El primero recorre 10 m por segundo y el segundo cuerpo recorrió 3 m en el primer segundo; en cada segundo siguiente recorre 5 m más que en el anterior. ¿Después de cuántos segundos los cuerpos se encuentran ?

Solución:

Sea  $x$  la cantidad de segundos que transcurren hasta juntarse. Siendo así, el primer cuerpo recorrió en un camino igual a  $10x$  metros, el segundo cuerpo recorrió un camino igual a la suma de los términos de la P.A.:

$$S_{x-1} = 3 + (3 + 5) + (3 + 5 \cdot 2) + (3 + 5 \cdot 3) + \dots + [3 + 5 \cdot (x - 1)]$$

Según los datos del problema  $10x + S_{x-1} = 153$ , ó

$$10x + \frac{5x+1}{2}x = 153.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática tenemos los valores  $x=6$  y  $x=-10.2$ . Y la respuesta es 6 segundos.

**Ejemplo 4**

¿Pueden los números que expresan las longitudes de los lados de un triángulo y su perímetro, formar una P.A. ?

Solución:

Sean los lados:  $a, a + d, a + 2d$  del triángulo, y que cumplen ser una P.A.

El perímetro es  $3a + 3d$ .

Si asumimos que el perímetro es el cuarto término, entonces el cuarto término menos el tercer término es igual a  $d$ .

$$(3a + 3d) - (a + 2d) = 2a + d \neq d$$

Concluimos que el cuarto término (perímetro) no corresponde a la P.A..

### Ejercicios

1. Si  $a = -2$ ,  $d = 4$  y  $S_n = 160$ . Hallar  $n$ .
2. ¿Cuántos términos de la P.A. 12,16,20,... deben tomarse para sumar 208?
3. ¿Cuántos términos de la P.A. 9, 12, 15,...deben tomarse para sumar 306?
4. En un P.A. el tercer término es igual a cuatro veces el primero, y el sexto término es 17. Escribir la sucesión.
5. Los términos del lugar 2, 31 y último de una P.A. son  $7\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  y  $-6\frac{1}{2}$ , respectivamente. Hallar el primer término y el número de terminos.
6. Los términos del lugar 4, 42 y último de una P.A. son 0, -95 y -125, respectivamente. Encuentre el primer término y el número de terminos.
7. Un hombre conviene en pagar una deuda de \$3 600 en 40 pagos parciales anuales que forman una P.A. Cuando 30 de los pagos están cubiertos, el individuo fallece dejando una tercera parte de la deuda sin pagar. Determine el valor del primer pago.
8. Entre dos números cuya suma es  $2\frac{1}{6}$  se interpola un número par de medios aritméticos; la suma de los medios excede a su número en una unidad. ¿Cuántos medios se han interpolado?
9. La suma de  $n$  términos de la progresión 2, 5, 8,... es 950. Hallar  $n$ .
10. Si la suma de 7 términos es 49 y la suma de 17 términos es 289, calcular la suma de los  $n$  términos.
11. Demostrar que la suma de un número impar de términos en una P.A. es igual al término central multiplicada por el número de términos de la progresión.
12. El cuarto término de la P.A. es igual a 9, el noveno término, igual a -6. ¿Cuántos términos hay que tomar para que la suma sea igual a 54 ?
13. El sexto término de uan P.A. constituye el 60% del tercer término de la misma progresión y su producto es igual a 15. ¿Cuántos términos hay que tomar de esta progresión para que su suma sea igual a  $30\frac{1}{3}$  ?

14. Completar los lugares vacíos de la tabla siguiente:

	$a_1$	$a_n$	$d$	$n$	$S_n$
1	7	39		9	
2	8		-2		14
3	31		-7	10	
4	1	61	5		
5			12	40	9 400
6	2		3		442
7		22	0.4	43	
8		25.7	1.3		266
9	-4.5	100			955
10		-15		11	0

# Bibliografía

- [1] Baldor, Aurelio. Algebra Elemental.
- [2] Bardell, Ross H. y Abraham Spitzbart. Algebra Superior.
- [3] Hall, H. S. y S. R. Knight. Algebra Superior.
- [4] Kalnin, R.A. Algebra y Funciones Elementales.
- [5] Lidski, V. B. y otros. Problemas de Matemáticas Elementales.
- [6] Swokowski, Earl W. Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica.