Progresiones Geométricas

Una sucesión $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ es una progresión geométrica si y sólo si si existe un número real $r \neq 0$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

para todo entero positivo n.

Nota 1 Al número r se le llama razón común, razón de la progresión o simplemente razón.

Con la anterior fórmula podemos obtener en foma recursiva los términos de la progresión. Así,

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Haciendo algunas transformaciones algebraicas, obtenemos

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, ...$$

De donde, el enésimo término de la progresión esta dada por la fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Esta fórmula nos dice que un término cualquiera es igual al primer término multiplicado por la razón elevada a un potencia igual al número de términos que lo preceden.

Ejemplo 1 Hallar los cinco primeros términos y el décimo término de la progresión cuyo primer término es 3 y en que la razón es $-\frac{1}{2}$.

Solución:

Si $a_1 = 3$ y $r = -\frac{1}{2}$, entonces los cinco primeros términos son

$a_2 = a_1 \cdot r = 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$,

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$,

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 3 \cdot (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{3}{8}$ y

$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 3 \cdot (-\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{16}$.

La progresión buscada es:

$$3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}$$

Para hallar el término a_{10} usamos la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, obtenemos

$a_{10} = 3(-\frac{1}{2})^9 = \frac{-3}{512}$. Finalmente,

$$a_{10} = -\frac{3}{512}$$

Ejemplo 2 Encuentre el séptimo término de la progresión geométrica: 2, 6, 18, ...

Solución:

Encontraremos a_7, con $r = \frac{6}{2} = 3$

$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 2 \cdot 3^6 = 1458.$

Nota 2 Cuando los términos de la progresión son alternativamente positivo y negativo, la razón sera un número negativo.

Ejemplo 3 Si el tercer término de una progresión geométrica es 5 y el sexto término es -40, hallar el octavo término.

Solución:

Tenemos $a_3 = 5$ y $a_6 = -40$. Si sustituimos por n=3 y n=6 en la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ obtendremos el sistema:

$$\begin{cases} 5 = a_1 r^2 \\ -40 = a_1 r^5 \end{cases}$$

Como $r \neq 0$, despejamos en la primera ecuación y: $a_1 = \frac{5}{r^2}$.

Susitituimos en la segunda ecuación a a_1,

$-40 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5 = 5r^3.$

Por tanto, $r^3 = -8$ y $r = -2$. con este valor encontramos a_1, sustituyendo adecuadamente.

$a_1 = \frac{5}{4}.$

De aqui el trabajo de encontrar a_8 es meramente mecánico.

$a_8 = a_1 \cdot r^7 = \frac{5}{4}(-2)^7 = -160$

Ejemplo 4 El sexto término de una progresión geométrica es $\frac{1}{16}$ y la razón $\frac{1}{2}$. Hallar el primer término.

Solución:

Aqui, $a_6 = \frac{1}{16}$ y $r = \frac{1}{2}$.

Despejando en la fórmula $a_6 = a_1 \cdot r^5$

$a_1 = \frac{a_6}{r^5},$

$a_1 = \frac{\frac{1}{16}}{(\frac{1}{2})^5} = 2$. Así $a_1 = 2$.

Ejemplo 5 El 1^{er} término de una progresión geométrica es 3 y el 6^{to} término -729. Hallar la razón.

Solución:

Aquí, $a_1 = 3$ y $a_6 = -729$, encontraremos r despejando simplemente de la fórmula,

$a_6 = a_1 \cdot r^5$.

$r^5 = \frac{a_6}{a_1} = \frac{-729}{3} = -243$. Asi $r^5 = -243$, o equivalentemente $r = \sqrt[5]{-243}$ y finalmente $r = -3$.

Ejercicios Nº1

Escribir los primeros tres términos de la P.G. para lo cual:

1. $a_1 = 11$ y $r = 3$. R/11, 33, 99.
2. $a_1 = -5$ y $r = 2$.
3. $a_1 = \frac{3}{2}$ y $r = \frac{2}{3}$.
4. $a_1 = 3$ y $r = -\frac{3}{2}$.
5. $a_1 = -5$ y $r = -\frac{2}{5}$.
6. $a_1 = b$ y $r = c$.

Hallar:

1. 7^{mo} término de la P. G.: 3, 6, 12,... R/$a_7 = 192$.
2. 8^{vo} término de la P. G.: $\frac{1}{3}, 1, 3...$
3. 9^{no} término de la P. G.: 8, 4, 2, ...
4. 6^{to} término de la P. G.: $1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, ...$
5. 8^{vo} término de la P. G.: $2\frac{1}{4}, 3, ...$
6. 6^{to} término de la P. G.: -3, 6, -12, ...
7. 8^{vo} término de la P. G.: 16, -4, 1,...
8. 4^{to} término de la P. G.: $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, ...$ R/$a_4 = \frac{9}{50}$.
9. 5^{to} término de la P. G.: $-\frac{3}{5}, \frac{3}{2}, -\frac{15}{4}, ...$
10. 10^{mo} término de la P. G.: $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, ...$
11. el primer término si la razón de una P.G. es $\frac{1}{2}$ y el 7^{mo} término $\frac{1}{64}$.
12. el primer término si el 9^{no} término de una P.G. es $\frac{64}{2187}$ y la razón es $\frac{2}{3}$. R/$a_1 = \frac{3}{4}$.

13. el primer término si el 5^{to} término de una P.G. es $\frac{16}{125}$ y el 6^{to} término $\frac{32}{625}$.
14. la razón de la P.G.:2,...,64, de 6 términos. R/r=2.
15. la razón de la P.G.: $\frac{1}{3}, ..., 243$, de 7 términos.
16. la razón de la P.G.: -5,...,640, de 8 términos.
17. la razón de la P.G.: $\frac{729}{2}, ..., \frac{3}{2}$, de 6 términos.
18. la razón de la P.G.: $8, ..., \frac{1}{512}$, de 7 términos.
19. la razón de la P.G.: $\frac{625}{16}, ..., 1$, de 5 términos.
20. la razón si el 8^{vo} término de una P.G. es $\frac{-2}{81}$ y el 1^{er} término es $\frac{27}{64}$.

Nota 3 En toda progresión geométrica en que el número de términos es un número par el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos de la progresión. Cuando el número de términos es impar, el producto de dos términos equidistantes es igual al término central al cuadrado de la progresión.

Interpolación de Medios Geométricos

Se trata aqui de formar un progresión geométrica, conociendo el valor del primer y del último término.

De la formula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, despejamos r, obteniendo

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Ejemplo 6 Interpolar 4 medios geométricos entre 96 y 3.

Solución:

Debemos formar una progresión geométrica: $96, a_2, a_3, a_4, a_5, 3$.

Primero hallaremos la razón: $r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$

$r = \sqrt[6-1]{\frac{3}{96}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

Si la razón es $\frac{1}{2}$, podemos obtener a_2.

$a_2 = a_1 r = 96 \cdot \frac{1}{2} = 48$, seguimos con a_3;

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 96 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 24$, continuamos con a_4;

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 96 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 12$, finalmente hallamos a_5;

$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 96 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 6$.

Por tanto, la P.G. buscada es: 96, 48, 24, 12, 6, 3.

La Suma Parcial n-ésima de una Progresión Geométrica

La n-ésima suma parcial de una progresión geométrica, cuyo primer término es a_1 y su razón común es $r \neq 1$, es

$$S_n = a_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

Ejemplo 7 Determinar la suma de los primeros cinco términos de la progresión geométrica que empieza de la manera siguiente: 1, 0.3, 0.09, 0.027,...

Solución:

Tenemos aqui: $a_1 = 1$, $r = 0{,}3$ y $n = 5$.

$S_5 = 1 \cdot \frac{(1-(0{,}3)^5)}{1-0{,}3} = 1{,}4251$.

Ejercicios Nº2

Interpolar:

1. 3 medios geométricos entre 5 y 3125.
2. 4 medios geométricos entre -7 y -224.
3. 5 medios geométricos entre 128 y 2.
4. 4 medios geométricos entre $4\frac{1}{2}$ y $\frac{16}{27}$.
5. 6 medios geométricos entre 2 y $34\frac{11}{64}$.
6. 4 medios geométricos entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{27}{256}$.
7. 7 medios geométricos entre 8 y $\frac{1}{32}$.
8. 6 medios geométricos entre 2 y $\frac{1}{64}$.
9. 4 medios geométricos entre 243 y $\frac{1}{32}$.
10. 7 medios geométricos entre 10 y 100.

Hallar la suma de los:

1. 5 primeros términos de: 6, 3, $1\frac{1}{2}$,...
2. 6 primeros términos de: 4, -8, 16,...
3. 7 primeros términos de: 12, 4, $1\frac{1}{3}$,...
4. 10 primeros términos de: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1,...
5. 8 primeros términos de: $2\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$,...
6. 7 primeros términos de: $\frac{-1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{-2}{5}$,...
7. 10 primeros términos de: -6, -3, $-1\frac{1}{2}$,...
8. 8 primeros términos de: 2, -1, $\frac{1}{2}$,...
9. 6 primeros términos de: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{2}{3}$,...
10. 6 primeros términos de: 9, -3, 1,...

Suma de una Progresión Geométrica Infinita

Si $|r| < 1$, la progresión geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + ... + a_1r^{n-1} + ...$$

tiene la suma denotada por $S = \frac{a_1}{1-r}$.

Nota 4 Aquí, $|r| < 1$ equivale a $-1 < r < 1$. En otras palabras r, es una fracción propia o un decimal de la forma 0,.... Además, la definición anterior significa que si se suman más y más términos de la progresión geométrica infinita, las sumas se acercan más y mas al valor $\frac{a_1}{1-r}$.

Nota 5 En el caso, $|r| \geq 1$ equivalente a $r \geq 1$ o $r \leq -1$. En este caso la progresión geométrica infinita al sumarle más y más términos, NO se acercan a ningún valor en particular.

Ejemplo 8 Hallar la suma de la progresión: 4, 2, 1,...

Solución:

Aquí $a_1 = 4$ y $r = \frac{1}{2}$, luego.

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8.$

Interpretando este resultado; decimos que 8 es el **límite** al cual tiende la suma. La suma misma nunca llega a ser exactamente 8, pero cuando mayor sea el número de términos que se tomen más se aproximarán a 8. Quizás sea un poco díficil de entender esto último para las personas que no tienen un curso de cálculo matemático. Sin embargo, en la práctica diremos que la suma es 8.

Ejemplo 9 Encuentre la suma de la P.G.: 5, $\frac{-3}{2}$, $\frac{9}{20}$,...

Solución:

Aquí $a_1 = 5$ y $r = \frac{-3}{10}$, por consiguiente;

$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-(\frac{-3}{10})} = 3\frac{11}{13}$,
finalmente, $S = 3\frac{11}{13}$, es la suma de la P.G.

Ejemplo 10 Hallar el número racional que representa el decimal $0{,}333333...$

Solución:

$0{,}33333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ...$

Aquí, $a_1 = \frac{3}{10}$ y $r = \frac{1}{10}$, luego.

$S = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$

Por consiguiente, $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$

Ejemplo 11 Hallar el número racional equivalente a 0.315151515....

Solución:

$0{,}315151515.... = \frac{3}{10} + \frac{15}{1000} + \frac{15}{100000} + ...$

Despues del término $\frac{3}{10}$ se presenta una P.G. infinita con $a_1 = \frac{15}{1000}$ y $r = \frac{1}{100}$, luego.
$S = \frac{\frac{15}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{66}$,

si efectuamos, $\frac{3}{10} + \frac{1}{66} = \frac{52}{165}$;

Finalmente, $0{,}31515... = \frac{52}{165}$.

Ejercicios Nº3

Hallar la suma de las P.G. infinitas siguientes:

1. 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$,...
2. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$,...
3. -5, -2, $\frac{-4}{5}$,...
4. -4, $\frac{-8}{3}$, $\frac{-16}{9}$,...

5. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$,...
6. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{49}$,...
7. 2, $\frac{-2}{5}$, $\frac{2}{25}$,...
8. -14, -6, $\frac{-18}{7}$,...

Determine por la suma al infinito, el valor de los números racionales correspondiente a los decimales siguientes:

1. 0.6666...
2. 0.121212...
3. 0.159159...
4. 0.3232...
5. 0.144144...
6. 0.35555...
7. 0181111...
8. 0.3181818...
9. 2.18181818....
10. 3.427272727...

EJERCICIOS TEÓRICOS

1. El quinto término de una P.G. es 81 y el segundo 24. Escribir la progresión.
2. La suma de una P.G. de razón 3 es 728 y el último término es 486. Encuentre el primer término y la P.G. correspondiente. R/$a_1 = 2$, 6, 18, 54, 162, 486.
3. En una P.G. el primer término es 7, el último 448, y la suma 889. Determine la razón.
4. Hallar el sexto término de la P.G. cuyos dos primeros términos son 4 y 6. R/$\frac{243}{8}$.
5. Obtenga el séptimo término de la P.G. cuyos segundo y tercer término son 2 y $-\sqrt{2}$, respectivamente. R/$\frac{-\sqrt{2}}{4}$.
6. En una P.G. $a_5 = \frac{1}{6}$ y $r = \frac{3}{2}$. Determine a_1 y S_5. R/$a_1 = \frac{1}{81}$ y $S_5 = \frac{211}{1296}$.
7. Dada una P.G. en la que $a_4 = 4$ y $a_7 = 12$, encuentre r y a_{10}. R/$r = \sqrt[3]{3}$ y $a_{10} = 36$.
8. La suma de tres números en P.G. es 216, y la suma de los productos que resultan tomados dos a dos es 156. Hallar los números.

9. La suma de un número infinito de términos de una P.G. es 4 y la suma de sus cubos es 192. Determine la progresión.

10. Hallar tres números de una P.G. cuya suma sea 38 y su producto 1728. R/8, 12, 18 y 18, 12, 8.

11. Hallar r si la suma de los primeros 6 términos de una P.G. de términos reales es 9 veces la suma de los primeros tres términos.

12. Un hombre desea ahorrar dinero y guarda 1 dólar el primer día, 2 dólares el segundo día, , 4 dólares el tercer día, y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada día. Si continua así, ¿ cuánto deberá guardar el decimoquinto día ? Suponiendo que no se le acaba el dinero, ¿ cuál es el total ahorrado a los 30 días ?

13. El lunes gané 2 dólares y cada día después gané el doble de lo que gané el anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado? R/64 y 126 dólares.

14. Un dentista arregla 20 piezas a una persona cobrándole un dólar por la primera, 2 por la segunda, 4 por la tercera, 8 por la cuarta y así sucesivamente. ¿Cuáles serán los honorarios del dentista? R/10 485,75 dólares.

15. Un hombre jugó durante 8 días y cada día ganó $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el día anterior. Si el 8^{vo} día ganó 1 dólar, ¿cuánto ganó el primer día ? R/2187 dólares.

16. El producto del 3^{er} y el 7^{mo} término de una P.G. de 9 términos es $\frac{1}{256}$. ¿Cuál es el producto del primer término por el último? R/$\frac{1}{216}$.

17. En una P.G. de 5 términos el cuadrado del 3^{er} término es $\frac{4}{81}$. Si el último término es $\frac{8}{81}$, ¿cuál es el primer término? R/$\frac{1}{2}$.

18. El 4^{to} término de una P.G. es $\frac{1}{4}$ y el 7^{mo} término $\frac{1}{32}$.Encuentre el 6^{to} término. R/$\frac{1}{16}$.

19. Un hombre ahorra cada año los $\frac{2}{3}$ de lo que ahorró el año anterior, ahorró el 5^{to} año 160 dólares. ¿Cuánto ha ahorrado en los 5 años ? R/ $ 2110.

20. La población de una ciudad ha aumentado en P.G. de 59 049 individuos que era en 1953 a 100 000 en 1958. ¿Cuál es la razón de crecimiento por año ? R/$\frac{10}{9}$.

21. Una persona ha ganado en cada año $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el año anterior. Si el 1^{er} año ganó 24 300 dólares, ¿cuánto ha ganado en 6 años ? R/ $ 36 400.

22. Se compra una finca de 2000 hectáreas a pagar en 15 años de este modo: $ 1 el primer año, $3 el segundo año, $ 9 el tercer año y así sucesivamente. ¿Cuál es el valor de la finca ? R/ $ 7 174 453.

23. Una bomba de vacío extrae del aire de un recipiente en cada carrera. ¿ Que porcentaje del aire original queda en el recipiente después de 10 carreras? R/$\frac{25}{256}$\$.

24. La depreciación anual de una máquina es 25 % de su valor al principio del año. Si el costo original de la máquina es $ 20 000, determine su valor al cabo de 6 años.

25. Un cultivo de bacterias se incrementa 20 % cada hora. Si el cultivo original tenia 10 000 bacterias, obtenga una fórmula para determinar el número de bacterias que hay después de t horas. ¿Cuántos microorganismos habrá en el cultivo al cabo de 10 horas ? R/$10000(\frac{6}{5})^t$=$10000(\frac{6}{5})^{10}$.

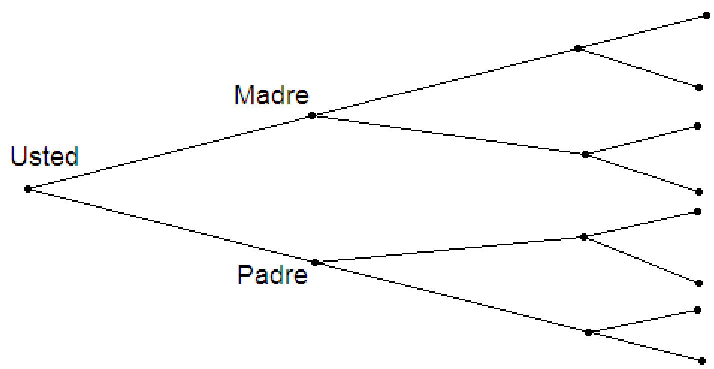
26. Se deja caer una pelota de goma desde una altura de 10 metros. Si rebota aproximadamente la mitad de la distancia en cada caída, use una progresión geométrica infinita para calcular aproximadamente la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse. R/30m.

27. Se deja caer una pelota de golf desde una altura de 6 metros. Su centro alcanza cada vez $\frac{2}{3}$ de la altura desde la cual cayó la vez anterior. ¿Qué distancia ha recorrido en el instante que golpea el suelo por séptima vez ? R/27,89 metros.

28. Se deja caer una pelota de golf desde una altura de 6 metros. Su centro alcanza cada vez $\frac{2}{3}$ de la altura desde la cual cayó la vez anterior. Hallar el límite de la distancia recorrida por el centro de la pelota hasta quedar en reposo. R/30 m.

29. El disco de un péndulo se balancea en un arco de 24 cm de largo en su primera oscilación. Si cada balanceo sucesivo es de aproximadamente cinco sextos de la longitud del anterior, use una progresión geométrica para determinar la distancia total aproximada que recorre antes de detenerse.

30. En la figura se indica un árbol genealógico que muestra tres generaciones anteriores y un total de 12 antecesores. Si usted tuviera que trazar su historia familiar hasta 10 generaciones atrás. ¿ Cuántos ancestros encontraría usted ?



Bibliografía

[1] Baldor, Aurelio. Algebra Elemental.

[2] Bardell, Ross H. y Abraham Spitzbart. Algebra Superior.

[3] Hall, H. S. y S. R. Knight. Algebra Superior.

[4] Kalnin, R.A. Algebra y Funciones Elementales.

[5] Lidski, V. B. y otros. Problemas de Matemáticas Elementales.

[6] Swokowski, Earl W. Algebra y Trigonmetría con Geometría Analítica.